



## **Recull**

**PAU-LOGSE**

**1997-2008**

**Matemàtiques**

**Classificació per temes**



**Notes**

Aquest document inclou tots els exercicis de les PAU de Matemàtiques (Batxillerat Logse) des de la seva primera convocatòria de l'any 1997.

La classificació dels exercicis s'ha realitzat a partir dels següents temes:

<b>TRIGONOMETRIA.....</b>	<b>2</b>
<b>GEOMETRIA DEL PLA .....</b>	<b>7</b>
<b>CIRCUMFERÈNCIA.....</b>	<b>8</b>
<b>FUNCIONS.....</b>	<b>10</b>
<b>DERIVABILITAT .....</b>	<b>10</b>
<b>PROBLEMES D'OPTIMITZACIÓ.....</b>	<b>18</b>
<b>CÀLCUL INTEGRAL .....</b>	<b>22</b>
<b>MATRIUS I SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS.....</b>	<b>28</b>
<b>GEOMETRIA DE L'ESPAI.....</b>	<b>32</b>
<b>SOLUCIONS.....</b>	<b>43</b>

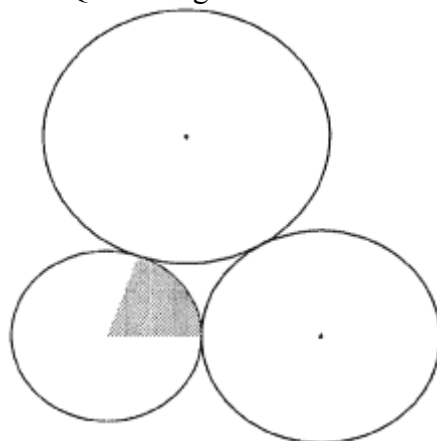
A partir de la convocatòria del 2004, els continguts de les proves es restringeixen als de segon curs de batxillerat. Així doncs, a partir d'aquest any ja no apareixen exercicis dels temes: *trigonometria, geometria del pla, circumferència*.

En quant a la codificació de l'exercici: PAUNNCSXN:  
NN indica l'any; C la convocatòria (Juny/Setembre); S la sèrie; X Problema/Qüestió; N el número d'exercici

Salvador Cardona Peris,  
scardon1@xtec.cat  
<http://www.xtec.cat/~scardon1>  
IES Pere Fontdevila (Gironella),  
<http://www.iesperfontdevila.cat>

## TRIGONOMETRIA

[PAU97J3AP1] La figura ens mostra tres jardins circulars mútuament tangents. Els radis d'aquests jardins són respectivament de 8, de 10 i de 12 metres. La zona del jardí més petit que està ombrejada en el dibuix (sector circular delimitat pels dos radis pels punts de tangència amb els altres dos jardins i l'arc de circumferència corresponent) es vol sembrar d'una gespa especial i es vol envoltar completament amb una petita tanca metàl·lica. Quina superfície té? Quina longitud de tanca farà falta?



[PAU97J3BQ2] Quina és la superfície del cercle en el qual podem inscriure un triangle equilàter de perímetre 60 centímetres?

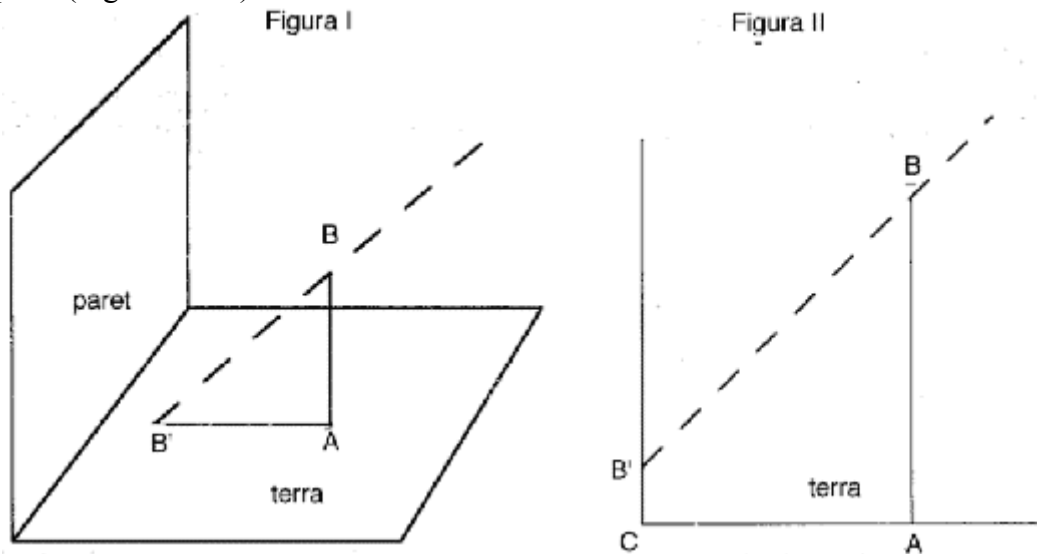
[PAU97S1AQ4] Determineu l'amplada d'un riu sabent que des d'una torre de 40 metres d'altura i situada a 30 metres en horitzontal de la riba del riu l'amplada d'aquest es veu sota un angle de 45 graus.

[PAU97S1BP1] Per fixar exactament una direcció terrestre respecte als quatre punts cardinals (nord, sud, est i oest) convindrem a mesurar l'angle que la direcció nord forma amb la direcció donada, prenent com a sentit positiu el sentit nord – est – sud –oest. Així, per exemple, una direcció de 0 graus voldrà dir la direcció nord, i una direcció de 270 graus voldrà dir la direcció oest.

Un vaixell demana ajut per ràdio i els senyals es reben en dues estacions P i Q distants entre si 65 km. L'estació P veu l'estació Q en una direcció de 132 graus (utilitzant el conveni anterior). P rep el senyal de ràdio del vaixell en una direcció de 135 graus. Q rep el senyal de ràdio del vaixell en una direcció de 264 graus. A quina distància de cada estació es troba el vaixell?

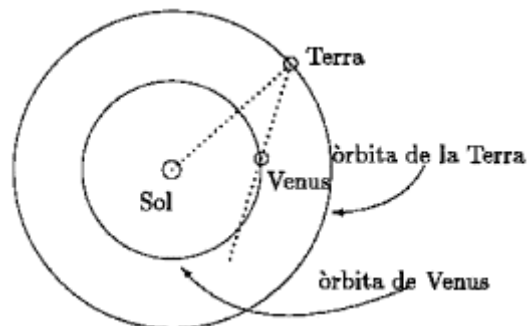
[PAU97S4AP1]. Estic situat davant la paret d'una casa il·luminada pel sol. Em trobo a una distància de 2 metres d'aquesta paret. En aquest moment el meu cos fa una ombra sobre terra que té una longitud d'1,6 m i segueix una direcció perpendicular al pla de la paret (a la figura I, el meu cos està representat pel segment AB; l'ombra, pel segment AB', i la línia discontinua representa el raig de sol que passa pel meu cap). Si avanço un pas d'un metre en direcció a la paret (si em situo, doncs, a 1 metre de la paret), la meua ombra es trenca en dos trossos, un tros estarà contingut al pla de terra (segment AC de la figura II) i l'altre estarà contingut al pla de la paret (segment CB' de la figura II).

Sabent que la meua alçada és d'1,7 metres, calculeu l'alçada que atenyerà l'ombra sobre la paret (segment CB').



[PAU98J3P1] Suposem que les òrbites de la Terra i de Venus al voltant del Sol són circumferències de radis respectius  $15 \cdot 10^7$  km i  $10,9 \cdot 10^7$  km.

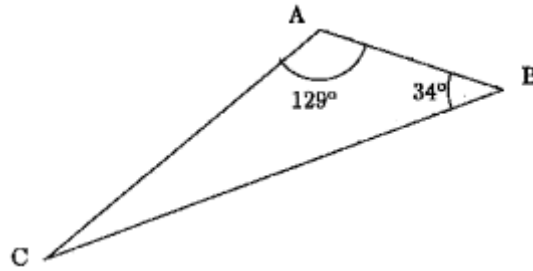
- a) A quina distància es troba Venus de la Terra quan l'angle d'observació Sol –Terra – Venus és de  $20^\circ$  ?
- b) A quina distància es trobaran la Terra i Venus quan l'angle Terra – Sol –Venus sigui de  $90^\circ$  ?



[PAU98J6P1] Es vol mesurar l'amplada d'un riu. A una distància de 25 m d'una de les ribes hi ha una torre de telecomunicacions de 35 m d'alçada. Pugem dalt de la torre i observem l'angle que formen les visuals que van cap a una riba i cap a l'altra, que és de  $20^\circ$ .

Feu un croquis de la situació i calculeu, amb aquestes dades, l'amplada del riu.

[PAU98S5P1] Des dels dos extrems de la badia d'Alcúdia (Mallorca), que són a 15,25 km l'un de l'altre, es pot veure el cim del Puig Major. Un equip de topògrafs ha pres les mides dels angles que es poden veure en el croquis següent:



on  $A$  i  $B$  són els dos extrems de la badia i  $C$ , el peu del cim. A més, l'angle d'elevació del cim vist des del punt  $A$  és de  $3^\circ$ .

Calculeu:

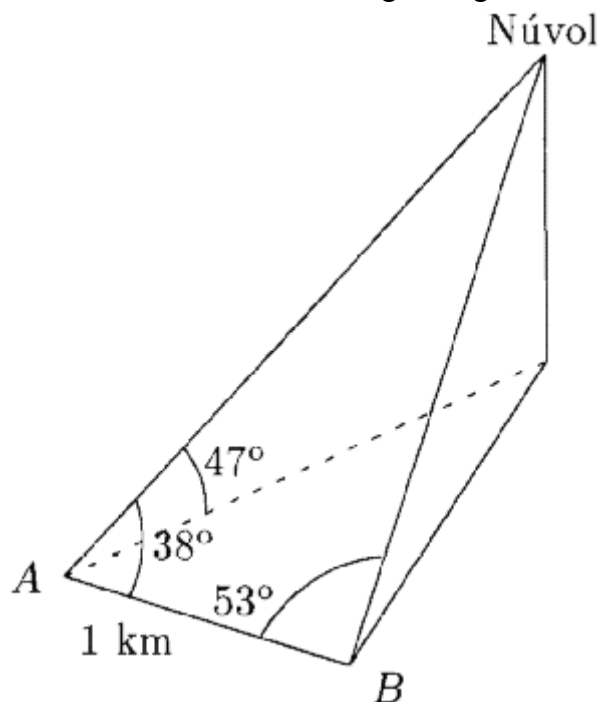
- L'angle entre la línia  $AC$  i la línia  $BC$ .
- Les distàncies de  $A$  a  $C$  i de  $B$  a  $C$ .
- L'alçària del cim.

[PAU98S2Q1] Les diagonals d'un paral·lelogram mesuren 30 cm i 20 cm i es tallen formant un angle de  $40^\circ$ . Calculeu-ne els costats.

[PAU99J1Q4] Des d'una certa distància, l'angle amb l'horitzontal de la visual cap al punt més alt d'un arbre és de  $60^\circ$ . Ens allunyem 10 metres i l'angle anterior és ara de  $30^\circ$ . Quina és l'alçària de l'arbre?

[PAU99J6Q3] Des de terra veiem el terrat d'un gratacel sota un angle de  $60^\circ$ . Amb quin angle el veuríem des d'una distància al peu del gratacel doble de l'anterior?

[PAU99J6P2] Per mesurar l'altura d'un núvol s'han fet simultàniament dues observacions des dels punts  $A$  i  $B$  distants entre si 1 quilòmetre i situats tots dos al nivell del mar. La inclinació de la visual des de  $A$  al núvol respecte a l'horitzontal és de  $47^\circ$ . Els angles que formen les visuals des de  $A$  i des de  $B$  amb la recta  $AB$  són, respectivament, de  $38^\circ$  i  $53^\circ$  tal com s'indica a la figura següent:



Calculeu l'altura del núvol respecte al nivell del mar.

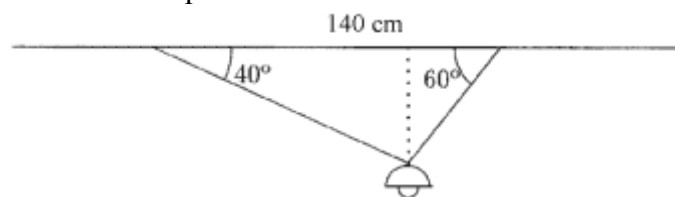
[PAU99S2Q4] L'angle entre els dos costats iguals d'un triangle isòsceles és de  $40^\circ$  i el costat desigual té una longitud de 40 centímetres. Quina és la longitud de cada un dels costats iguals d'aquest triangle?

[PAU99S5Q4] Us situeu en un punt d'un terreny horitzontal i l'angle que forma la visual dirigida al punt més alt d'un arbre amb l'horitzontal és de  $60^\circ$ . Quin serà l'angle que formarà amb l'horitzontal la visual dirigida al punt més alt de l'arbre si us n'allunyeu a una distància triple de la que éreu abans?

[PAU99S5P2] Volem penjar un llum a una certa distància del sostre d'una habitació. Per fer-ho, agafem una corda, hi lliguem el llum i la clavem pels extrems en dos punts del sostre separats per una distància de 140 centímetres, de manera que els angles entre la corda i el sostre són de  $40^\circ$  i  $60^\circ$  a cada un dels extrems.

a) Quina serà la longitud total de la corda?

b) A quina distància del sostre quedarà el llum?



[PAU00J1Q4] El circ és a la ciutat i s'ha d'instal·lar. L'especialista a muntar-lo encara no ha arribat i els altres no saben la quantitat de cable d'acer que necessiten. El més espavilat recorda que, un cop tensat el cable des de l'extrem del pal principal fins a un punt determinat del terra amb el qual forma un angle de  $60^\circ$ , calen dos metres més de cable que si forma amb el terra un angle de  $70^\circ$ . En total han de posar sis cables tensats formant amb el terra un angle de  $60^\circ$ . Quants metres de cable necessiten?

[PAU00J3Q4] Els costats d'un triangle són de longituds 8 cm, 11 cm i 13 cm. Calculeu el valor del sinus de l'angle més petit.

[PAU00S2Q4] D'un angle  $\alpha$  del primer quadrant coneixeu que  $\sin \alpha = 1/3$ . Calculeu el valor exacte de:

- $\tan \alpha$
- $\sin 2\alpha$

[PAU00S6P2] Dos amics, l'Àlex i la Berta, són cadascun al terrat de casa seva, veuen un vaixell i els interessa determinar la distància a què es troba.

a) Primer de tot volen calcular la distància que separa el teodolit de l'Àlex del de la Berta. Sigui  $A$  el punt on l'Àlex té plantat el teodolit i  $B$  el punt on la Berta té situat el seu. L'Àlex mesura exactament al seu terrat una distància  $AC = 10$  m, de manera que el triangle  $ACB$  és rectangle a  $A$ . Llavors la Berta mesura l'angle a  $B$  d'aquest triangle i resulta que és de  $5,6^\circ$ . Calculeu la distància  $AB$ .

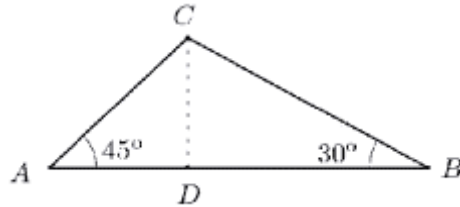
b) Per determinar a quina distància és el vaixell, l'Àlex mesura l'angle que formen a  $A$  les visuals  $A$ -vaixell i  $A$ - $B$ , que resulta que és  $75,5^\circ$ , i la Berta l'angle que formen a  $B$  les visuals  $B$ - $A$  i  $B$ -vaixell, que és de  $81,6^\circ$ . A quina distància és el vaixell de la Berta? Es pot saber, sense fer més càlculs, qui és més a prop del vaixell? Per què?

[PAU01S2Q4] Els tres costats d'un triangle mesuren 3 cm, 4 cm i 5 cm. Calculeu els seus angles i la seva àrea.

[PAU01S2P1] Hem de fer un mapa d'una certa zona geogràfica.  $A$ ,  $B$  i  $C$  són els cims de tres muntanyes de la mateixa alçària, de manera que les posicions de  $A$  i  $B$  són ben conegudes i ja estan representades en el mapa, mentre que la posició de  $C$  s'ha de determinar. Pugem a dalt del cim  $A$  i mesurem l'angle entre la línia  $A-B$  i la línia  $A-C$ , que és de  $68^\circ$ . Pugem a dalt del cim  $B$  i aquí mesurem l'angle entre les línies  $B-C$  i  $B-A$ , que resulta ser de  $35^\circ$ . En el mapa que tenim, la distància sobre el paper entre  $A$  i  $B$  és de 3 cm.

- Feu un diagrama de la situació i determineu quin angle formen en  $C$  les línies  $C-A$  i  $C-B$ .
- Quines seran, sobre el mapa, les distàncies entre  $A$  i  $C$  i entre  $B$  i  $C$ ?
- Si el mapa és a escala 1:50000, calculeu la distància real entre els punts  $A, B$  i  $C$ .

[PAU01S5P2] L'àrea del triangle de vèrtexs  $A$ ,  $B$  i  $C$  és de  $50 \text{ m}^2$ . L'angle en  $A$  d'aquest triangle és de  $45^\circ$  i l'angle en  $B$  és de  $30^\circ$ . Sigui  $D$  el peu de l'altura des del vèrtex  $C$ , és a dir, el punt del segment  $AB$  tal que  $CD$  és perpendicular a  $AB$ .



Calculeu la longitud dels segments  $CD$ ,  $AD$ ,  $BD$ ,  $AB$ ,  $BC$  i  $AC$ .

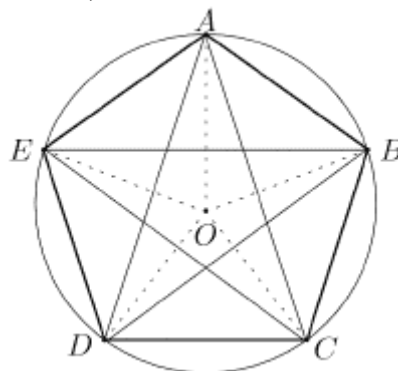
[PAU01S4Q2] Sigui  $A$ ,  $B$  i  $C$  els tres vèrtexs d'un triangle equilàter de costat 3 cm i  $P$  el punt del costat  $AB$  que és a 1 cm del vèrtex  $A$ . Quina és la longitud del segment  $CP$ ?

[PAU02J3P2] D'un paral·lelogram sabem que el costat més llarg mesura 20 cm, que la seva àrea és de  $120 \text{ cm}^2$  i que l'angle més petit val  $30^\circ$ .

Determineu:

- El valor de l'altre angle del paral·lelogram (el més gran).
- La longitud del costat petit.
- El que mesura la diagonal més llarga.

[PAU02J2P2] Sobre una circumferència de radi 1 m i centre en el punt  $O$  considerem els cinc vèrtexs  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  d'un pentàgon regular (és a dir, amb els cinc costats de la mateixa longitud) com el del dibuix següent: (on hem dibuixat també els costats  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  i  $DE$ ; les diagonals  $AC$ ,  $BD$ ,  $CE$ ,  $DA$  i  $EB$ ; i els radis que acaben en cada un dels vèrtexs  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $OD$  i  $OE$ ).



Calculeu:

- a) L'angle que formen el radi que acaba en el vèrtex  $A$  amb el costat  $AB$  i l'angle que formen en el vèrtex  $A$  els dos costats que el tenen com a extrem (és a dir, l'angle  $A$  entre els costats  $EA$  i  $AB$ ).
- b) La longitud de cada un dels costats del pentàgon.
- c) La longitud de qualsevol de les diagonals (per exemple la  $EB$ ).
- b) L'àrea del triangle  $EAB$ .

[PAU02S1Q4] Les agulles d'un rellotge de paret fan 10 i 12 centímetres, respectivament.

- a) Quina és la distància entre els seus extrems quan el rellotge assenyalava les quatre?
- b) Quina és la superfície del triangle que determinen a aquesta hora?

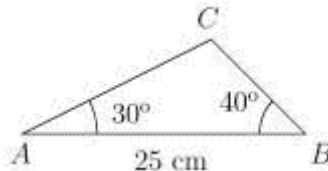
[PAU03J2P2] D'un triangle sabem que la suma de les longituds de dos costats  $a$  i  $b$  és d'11 m, que l'angle  $C$  oposat al tercer costat val  $30^\circ$  i que l'àrea és de  $7 \text{ m}^2$ . Calculeu

- a) La longitud de cada un dels costats del triangle.
- b) Els angles del triangle.

[PAU03J5P2] Al terrat d'un edifici hi ha instal·lada una antena de telefonia mòbil. Des d'un punt  $P$  del carrer, l'angle entre l'horitzontal i la línia que va de  $P$  cap a l'extrem superior de l'antena és de  $34^\circ$ . Ens apropem fins a un punt  $Q$  que és 15 metres més a prop de l'edifici i ara l'angle entre l'horitzontal i la línia que apunta cap a l'extrem superior de l'antena és de  $42^\circ$ , mentre que l'angle entre l'horitzontal i la línia que apunta cap a l'extrem inferior de la mateixa antena és de  $35^\circ$ .

- a) Feu un esquema de la situació marcant molt clarament quins són els angles que es donen a l'enunciat.
- b) Calculeu les distàncies de  $Q$  als dos extrems de l'antena.
- c) Calculeu l'altura de l'antena i l'altura de l'edifici.

[PAU03S3Q3] Calculeu l'àrea del triangle  $ABC$  representat en l'esquema següent:



## GEOMETRIA DEL PLA

[PAU97J2AP1] De la representació d'un rombe en uns eixos cartesianes en sabem que té dos vèrtexs situats en els punts  $(3, 1)$  i  $(-2, 1)$ , i que una de les diagonals està sobre la recta d'equació  $x - 2y - 1 = 0$ . Determineu les coordenades de tots els vèrtexs del rombe. Justifiqueu la resposta.

[PAU97J2Q3] Considereu els dos punts del pla  $P(2, 5)$  i  $Q(6, -1)$  i la recta d'equació  $y = x - 3$ . Diguen quants punts hi ha sobre aquesta recta que equidistin de  $P$  i de  $Q$ . Calculeu les coordenades de tots aquests punts.

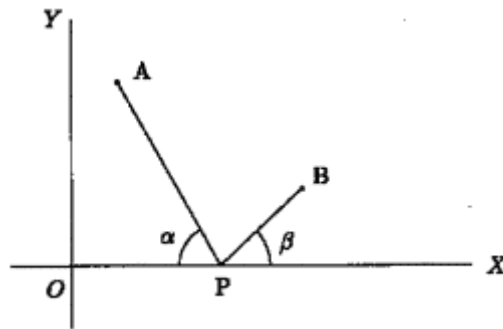
[PAU97J3AQ3] Expliqueu raonadament algun mètode per decidir si tres punts del pla donats per les seves coordenades,  $A = (a_1, a_2)$ ,  $B = (b_1, b_2)$  i  $C = (c_1, c_2)$ , estan alineats o

no ho estan. Decidiu, tot aplicant el mètode que hagueu explicat, si els punts  $(-2, -3)$ ,  $(-3, 0)$  i  $(6, 2)$  estan alineats o no.

[PAU97S1AP1] Considereu les tres rectes del pla d'equacions  $-x + y = 4$ ,  $y = 1$  i  $ax + y = 1$ . Digueu per a quins valors del paràmetre  $a$  formen un triangle. Digueu per a quins valors de  $a$  formen un triangle d'àrea 2. Expliqueu en general com es pot saber si tres rectes del pla determinen un triangle.

[PAU97S1BQ4]. Quantes rectes del pla passen pel punt  $(1, -2)$  i formen un angle de 45 graus amb la recta d'equació  $4x - 3y + 2 = 0$ ? Doneu les equacions de totes les que hi hagi.

[PAU98J6P2] L'eix  $OX$  representa la banda d'una taula de billar. Una bola que està situada al punt  $A = (1, 6)$  ha de tocar una bola situada al punt  $B = (5, 2)$  després d'haver rebotat a la banda (quan una bola de billar rebotat a la banda, els angles  $\alpha$  i  $\beta$  de la figura són iguals).



Determineu:

- El punt exacte  $P$  on la bola hauria de topat amb la banda.
- L'equació de la trajectòria inicial que ha de seguir la bola.
- L'equació de la trajectòria que segueix la bola després d'haver topat amb la banda, fins a tocar la bola en el punt  $B$ .
- L'angle entre les trajectòries  $AP$  i  $PB$ .

[PAU98S5Q3] Siguin  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$  els dos vectors del pla:

$$\vec{u} = (1, 1) \quad \vec{v} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$$

Calculeu l'angle que formen  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$ .

[PAU04S5Q4] Donats els vectors  $\vec{u} = (1, 2)$  i  $\vec{v} = (-3, 1)$ :

- comproveu que  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$  formen una base de l'espai vectorial dels vectors del pla;
- trobeu els components del vector  $\vec{w} = (-1, 5)$  en la base  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$

## CIRCUMFERÈNCIA

[PAU97J2AQ4] D'una circumferència representada en uns eixos cartesianes de coordenades sabem que té el centre sobre l'eix de les  $x$ , i que és tangent a la recta  $x + y - 8 = 0$  en el punt  $(6, 2)$ . Quines són les coordenades del centre? Quina és la longitud del radi?

[PAU97J3BQ3] Calculeu un punt  $P$  de coordenades  $(a, 0)$ , amb  $a > 0$ , tal que les dues tangents a la circumferència  $x^2 + y^2 = 4$  traçades des del punt  $P$  formin un angle de 60 graus.

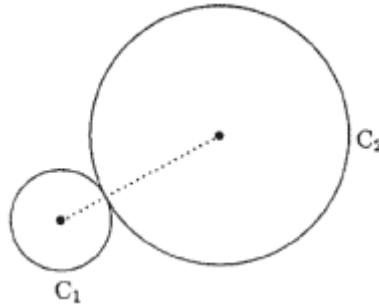
[PAU98S2P2] Considereu dues circumferències  $C_1$  i  $C_2$  del pla que compleixen les condicions següents:

$C_1$  passa pel punt  $P = (2, 0)$  i en aquest punt té per tangent la recta  $y = x - 2$ .

El centre de  $C_1$  és a sobre de la recta  $y = x$ .

$C_2$  té per equació  $x^2 + y^2 - 8x - 8y = k$ , on  $k$  és una certa constant.

Les circumferències  $C_1$  i  $C_2$  són tangents exteriors, tal com s'indica en la figura següent:



- Calculeu el centre i el radi de  $C_1$  i escriviu l'equació de  $C_1$ .
- Calculeu les coordenades del centre  $C_2$ .
- Calculeu les coordenades del punt d'intersecció de  $C_1$  amb  $C_2$ . Calculeu el valor de la constant  $k$  de l'equació de  $C_2$ .

[PAU99J6Q1] Calculeu el radi i les coordenades del centre de la circumferència que té per equació  $x^2 + y^2 + 6y + 10y = -30$ .

[PAU99S5Q1] Una circumferència del pla passa pels punts  $(1, 3)$  i  $(3, 5)$  i té el centre sobre la recta  $x + 2y = 3$ . Trobeu el centre, el radi i l'equació d'aquesta circumferència.

[PAU00S6Q4] Considereu la circumferència del pla d'equació  $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 = 0$

- Calculeu-ne el centre i el radi.
- Comproveu que el punt  $(4, 0)$  pertany a la circumferència i determineu l'equació de la seva tangent en aquest punt (la recta tangent en un punt d'una circumferència és la que és perpendicular al radi que passa per aquest punt).

[PAU01S2Q2] La circumferència  $C$  passa pel punt  $A = (4, 0)$  i és tangent a la recta  $y = x$  en el punt  $B = (4, 4)$ .

- Determineu l'equació de la recta que passa per  $B$  i pel centre de la circumferència  $C$ .
- Trobeu el centre de  $C$  i calculeu el seu radi.

[PAU01S5Q3] Considereu en el pla els punts  $P = (1, -1)$  i  $Q = (3, 5)$  i la recta  $r$  d'equació  $x + y + 2 = 0$ . Calculeu l'equació de la circumferència que passa per  $P$  i  $Q$  i que té el centre a  $r$ .

## FUNCIONS

[PAU97J2BQ2] Calculeu el límit quan  $x \rightarrow \infty$  i quan  $x \rightarrow -\infty$  de la funció polinòmica  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ , on els coeficients  $a_0, a_1, \dots, a_n$  són nombres reals, i  $a_n > 0$  (haureu de considerar el cas que  $n$  sigui parell i el cas que sigui senar). Justifiqueu després el fet que tot polinomi de grau senar amb els coeficients reals té sempre, pel cap baix, una arrel real.

[PAU97S1AQ3] Feu un esquema de la representació gràfica del polinomi

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20$$

i digueu quantes arrels reals té. Per a cada arrel, determineu la seva part entera.

[PAU97S4AQ4] El carboni 14 es desintegra seguint la llei exponencial següent:  $Q(t) = Q_0 e^{-kt}$ , on  $t$  indica el temps transcorregut a partir d'un cert instant inicial que es pren com a origen per comptar el temps (aquest origen és arbitrari i es pot prendre com a tal qualsevol constant de temps),  $Q(t)$  indica la quantitat d'àtoms que encara no s'han desintegrat a l'instant  $t$ ,  $Q_0$  la quantitat d'àtoms que no s'havien desintegrat a l'instant que s'ha escollit com a instant inicial, i  $k$  és una certa constant. El carboni 14 té un període de semidesintegració de 5.770 anys. Això vol dir que cada 5.770 anys la quantitat d'àtoms que encara no s'han desintegrat es redueix a la meitat. A partir d'aquesta dada determineu el valor de la constant  $k$ . Digueu després quin tant per cent d'àtoms encara no s'han desintegrat al cap de 30.000 anys de l'instant inicial.

[PAU02J3Q2] Determineu el valor que ha de tenir  $k$  perquè la funció  $f(x) = \frac{2x^2 - 3kx + 5}{x - 2}$  tingui límit quan  $x$  tendeix a 2 (és a dir, existeixi  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ) i calculeu el valor que tindrà aquest límit.

[PAU06J1Q4] Trobeu el domini i les asímptotes de la funció definida per

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 1}$$

## DERIVABILITAT

[PAU97J2BQ4] Calculeu els extrems relatius de la funció

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-3)^2}$$

[PAU97J3AQ2] a) En quin punt la corba d'equació  $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$  té una recta tangent horitzontal?

b) És possible que aquesta corba tingui una tangent paral·lela a la recta  $3x - 3y + 7 = 0$  en algun punt d'abscissa  $x$  negativa?

- [PAU97J3BP1] a) Calculeu els màxims i mínims locals de la funció  $f(x) = x^3 + x^2 + b$  i doneu en funció de  $b$  el valor que pren la funció en aquests màxims i mínims.
- b) Feu un esbós de la gràfica de la funció quan el paràmetre  $b$  és positiu, i quan aquest paràmetre és nul.
- c) Calculeu el valor negatiu de  $b$  per al qual la gràfica de  $f(x)$  és tangent a l'eix de les  $x$  en el màxim local d'aquesta funció. Dibuixeu la gràfica de la funció per a aquest valor de  $b$ .
- d) Determineu (fent servir l'estudi de la funció realitzat en els apartats anteriors) els valors de  $b$  per als quals l'equació  $f(x) = 0$  només té una solució.

[PAU97S1BQ3] Expliqueu la relació que hi ha entre la derivada d'una funció en un punt i la tangent a la gràfica d'aquesta funció en el mateix punt. ¿La corba  $y = x^3 - 3x$  i la recta  $y = -5x$  són tangents en algun punt?

[PAU97S4BQ2] Determineu per a quins valors de  $n$  la recta  $y = -3x + n$  és tangent a la gràfica de la funció  $f(x) = x^3 - 6x + 1$ .

[PAU98J3Q4] En quin punt de la corba  $f(x) = \ln x$  la recta tangent és paral·lela a la corda  $AB$  determinada pels punts  $A=(1, 0)$  i  $B=(e, 1)$

[PAU98J6Q2] Sigui  $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 5b$ . Trobeu els valors de  $a$  i  $b$  de manera que la gràfica de  $f(x)$  tingui la tangent horitzontal per a  $x = 1$  i, a més, la corba passi pel punt  $(-1, -8)$

[PAU98S2Q4] Trobeu el punt de la gràfica de  $y = x + \ln x$  tal que la recta tangent sigui perpendicular a la recta  $2x + 6y = 5$ .

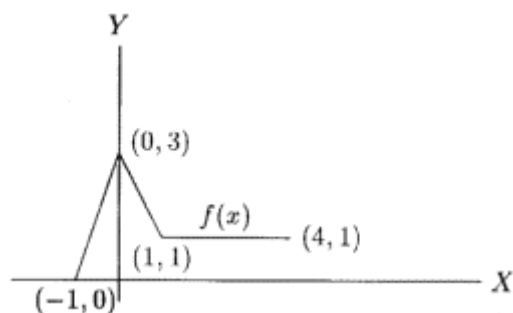
[PAU98S2P1] Sigui  $f(x) = \frac{x+5}{x^2-9}$

- Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de  $f(x)$  en el punt d'abscissa  $x = 2$ .
- Estudieu el domini de definició de  $f(x)$  i les asymptotes.
- Estudieu els intervals de creixement i decreixement. Feu-ne la representació gràfica

[PAU99J6P1] Considereu la funció  $y = f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 1}$

- Feu un estudi de les seves asymptotes.
- Calculeu els punts en què aquesta funció té extrem relatiu i digueu per a quins intervals del domini la funció és creixent.
- Feu un esbós de la gràfica de la funció a partir de les dades obtingudes en els apartats anteriors.

[PAU99S2Q1] La gràfica d'una funció és la que hi ha en el dibuix següent. Quina és la gràfica de la seva funció derivada? En quins punts és discontinua la derivada?



[PAU99S2P1] Considereu la funció  $f(x) = \frac{1}{8x - x^2}$

- Trobeu el domini de  $f(x)$  i les asímptotes.
- Determineu el signe de la funció en el seu domini (determinar el signe de  $f(x)$  vol dir establir per a quins valors de  $x$  es compleix  $f(x) \geq 0$  i per a quins  $f(x) \leq 0$ ).
- Trobeu-ne els intervals de creixement i decreixement i els extrems relatius.
- Feu un esquema de la gràfica de la funció.

[PAU00J1Q1] Calculeu els valors de  $a$  tals que les tangents a la gràfica de la funció  $f(x) = ax^3 + 2x^2 + 3$  en els punts d'abscisses  $x = 1$  i  $x = -1$  siguin perpendiculars entre si.

[PAU00J3Q2] Determineu els punts de la gràfica de  $f(x) = x^4 + 5x$  on la recta tangent és paral·lela a la bisectriu del primer quadrant. Calculeu l'equació d'aquestes rectes tangents.

[PAU00J3P1] Considereu la funció  $f(x) = \frac{x^2}{x+a}$ , on  $a$  és un paràmetre.

- Calculeu  $a$  sabent que la recta  $y = x + 2$  és una asímptota obliqua d'aquesta funció.
- Prenent el valor de  $a$  obtingut en l'altre apartat, calculeu el domini, les interseccions de la gràfica amb els eixos, els intervals de creixement i decreixement i els extrems relatius de la funció  $f$ . Feu una gràfica aproximada d'aquesta funció a partir de les dades que heu obtingut.

[PAU00S2Q1] a) Trobeu els extrems relatius de la funció polinòmica

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - 3$$

i calculeu els valors de  $f(x)$  en aquests punts. A partir d'aquestes dades, feu un dibuix aproximat de la seva gràfica.

- Demostreu que l'equació  $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - 3 = 0$  té, exactament, tres solucions reals.

[PAU00S6Q1] D'una funció  $y = f(x)$  sabem

- El seu domini de definició és tot  $\mathbf{R}$ .
- La seva funció derivada és

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

c)  $f(x)$  és contínua en tot punt i  $f(-1) = 2$ .

Determineu el valor de  $f(1)$  i dibuixeu la gràfica de la funció  $f(x)$ .

[PAU00S6Q2] Donada la funció  $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$ , determineu l'equació de la recta tangent a la seva gràfica en el punt on s'anul·la la segona derivada.

[PAU01S2P2] Considereu la funció  $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 1}$

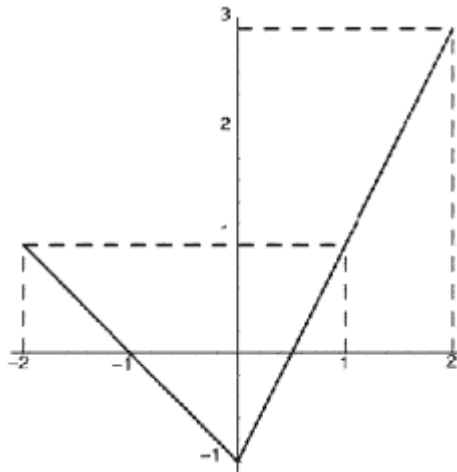
- Determineu les seves asímptotes.
- Calculeu els intervals on creix i on decreix, i els extrems relatius.
- D'acord amb els resultats que heu obtingut, dibuixeu aproximadament la seva gràfica.
- Fixant-vos en la gràfica anterior, expliqueu quina seria la gràfica de la funció  $g(x) = -f(x) + 3$  (feu-ne un esquema). En quins punts té màxims la funció  $g(x)$ ?

[PAU01S5Q1] Per a cada valor del paràmetre  $a \in \mathbf{R}$ , considereu la funció  $f(x) = x + \frac{3-a}{x}$

(definida per a tots els valors de  $x$  diferents de 0).

- Determineu per a cada valor del paràmetre  $a$ , els extrems relatius que té la funció  $f(x)$ .
- Per a quins valors del paràmetre  $a$  la funció  $f(x)$  és sempre creixent?

[PAU01S5Q2] Teniu una funció  $f(x)$  definida per a  $x \in (-2, 2)$  sabeu que el gràfic de  $f'(x)$  és de la forma



(on  $f'(-1) = 0$ ,  $f'(0) = -1$ ,  $f'(1) = 1$ ) i que  $f(0) = 2$ .

Dibuixeu un gràfic aproximat de  $f(x)$  indicant en quins punts hi ha extrems relatius.

[PAU01S4Q3] Considereu la funció definida per

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{on } a \text{ és un nombre real.}$$

- Calculeu  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  i comproveu que  $f(x)$  és contínua en  $x = 0$ .
- Per a quin valor del paràmetre  $a$  la funció  $f(x)$  és derivable en  $x = 0$ ?

[PAU02J2Q2] Sabent que la funció  $y = (x + a)(x^2 - 4)$ , on  $a$  és un nombre real, té un màxim i un mínim relatiu, i que el màxim relatiu s'assoleix en el punt  $x = -\frac{1}{3}$ , trobeu l'abscissa del mínim relatiu.

[PAU02J2Q3] Sigui  $f(x) = \frac{mx-2}{x-1}$ , on  $m$  és un paràmetre.

- Determineu per a cada valor del paràmetre  $m$  el valor del límit  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  (si existeix).
- Per a quins valors de  $m$  la derivada  $f'(x)$  de la funció  $f(x)$  és positiva per a tot  $x$ ?

[PAU02S1Q2] Se sap que la derivada d'una funció  $f(x)$  és  $f'(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 1}$

Calculeu les abscisses dels punts on la funció  $f(x)$  té els seus extrems relatius, especificant per a cada un dels valors que obtingueu si es tracta d'un màxim o d'un mínim relatiu.

[PAU03J2Q1] Calculeu les equacions de les dues rectes del pla que passen pel punt  $P = (1, -1)$  i que són tangents a la corba d'equació  $y = (x - 1)^2$

[PAU03J5P1] a) Determineu el valor del paràmetre  $a$  que fa que la funció  $f(x) = \frac{x+a}{x^3}$

presenti un extrem relatiu en el punt d'abscissa  $x = 3$ .

- Per a aquest valor del paràmetre  $a$ , calculeu els intervals de creixement i decreixement, i les asímptotes de la funció.
- A partir de les dades que heu obtingut, feu una gràfica aproximada d'aquesta funció.

[PAU03S3Q2] Calculeu el punt de la corba  $y = 2 + x - x^2$  en què la tangent és paral·lela a la recta  $y = x$ .

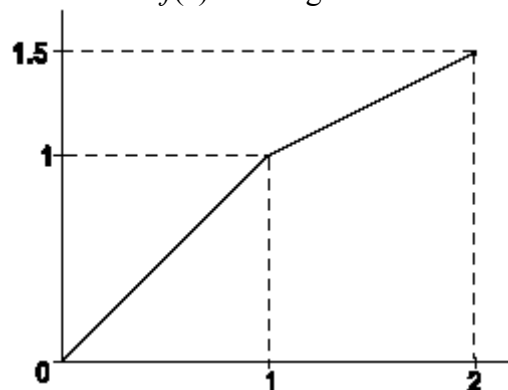
[PAU04J3Q1] Considereu la funció  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ .

- Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de  $f(x)$  en el punt d'abscissa  $x = 3$ .
- Existeix alguna altra recta tangent a la gràfica de  $f(x)$  que sigui paral·lela a la que heu trobat? Raoneu la resposta i, en cas afirmatiu, trobeu-ne l'equació.

[PAU04J3Q3] Considereu la funció  $f(x) = 1 + \frac{a}{x} + \frac{6}{x^2}$  on  $a$  és un paràmetre.

- Calculeu el valor del paràmetre  $a$  sabent que  $f(x)$  té un extrem relatiu en el punt d'abscissa  $x = 3$ .
- Aquest extrem relatiu, es tracta d'un màxim o d'un mínim? Raoneu la resposta.

[PAU04J4Q4] Considereu la funció  $f(x)$  de la figura definida a l'interval  $[0, 2]$ .



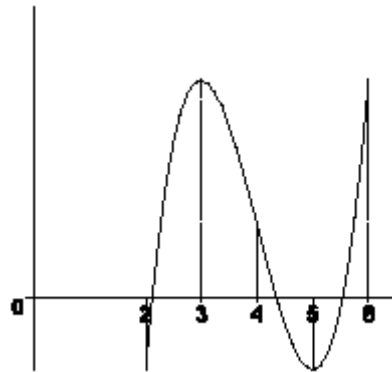
- Calculeu la funció derivada  $f'(x)$  a l'interval  $(0, 2)$

b) Hi ha algun punt de  $(0, 2)$  en el qual  $f'(x)$  no existeixi?

c) Calculeu  $\int_0^2 f(x)dx$

Raoneu totes les respostes.

[PAU04S5Q2] La gràfica següent correspon a una funció  $f: [2, 6] \rightarrow \mathbf{R}$  derivable i amb derivada contínua. Feu un esbós de la gràfica de  $f': (2, 6) \rightarrow \mathbf{R}$  i justifiqueu-ne el perquè.



[PAU04S5P1] Considereu la funció polinòmica de tercer grau  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , ( $a \neq 0$ ).

a) Trobeu els valors de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  per als quals  $f(x)$  talla l'eix  $OX$  en els punts  $x=0$  i  $x=1$  i presenta un mínim relatiu en el punt  $x=0$ .

b) Feu un esbós de la gràfica de la funció que heu trobat, i acabeu de calcular els elements necessaris per dibuixar-la.

[PAU05J4Q3] Trobeu els màxims i mínims relatius de la funció  $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$

[PAU05J4Q4] Sigui la paràbola  $y = 2x^2 + x + 1$  i sigui  $A$  el punt de la paràbola d'abscissa 0.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la paràbola en el punt  $A$ .

b) En quin punt de la paràbola la recta tangent és perpendicular a la recta que heu trobat en l'apartat anterior?

[PAU05S3P2] Considereu la funció  $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + b & \text{si } x < 0 \\ a e^{bx} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  on  $a$  i  $b$  són

nombres reals.

a) Quina condició han de complir  $a$  i  $b$  per tal que  $f$  sigui contínua a tot  $\mathbf{R}$ ?

b) Trobeu els valors de  $a$  i  $b$  per als quals  $f$  sigui contínua però no derivable a tot  $\mathbf{R}$ .

c) Per a  $a = 1$  i  $b = 1$ , calculeu  $\int_{-1}^1 f(x)dx$

[PAU06J1P2] Considereu la funció  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$

a) Calculeu  $c$  sabent que la seva recta tangent en el punt d'abscissa  $x = 0$  és horitzontal.

- b) Per al valor de  $c$  trobat a l'apartat anterior, calculeu  $a$  i  $b$  sabent que aquesta funció té un extrem relatiu en el punt d'abscissa  $x = -2$  i que talla l'eix OX quan  $x = 1$ .
- c) Per als valors obtinguts als altres apartats, calculeu els intervals on la funció creix i decreix, els seus extrems relatius i feu una representació gràfica aproximada.

[PAU06J3Q1] Considereu la funció definida per  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$ . Calculeu quant val el pendent de la recta tangent a la seva gràfica pel punt d'abscissa  $x = 0$ . Trobeu si hi ha altres punts en els quals el pendent de la tangent sigui igual al que s'ha obtingut.

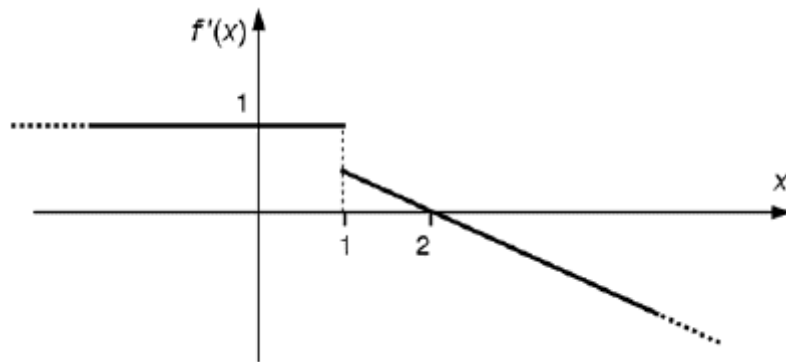
[PAU06J3P1] Donada la funció  $f(x) = e^{-x^2+2x}$

- Trobeu el seu domini i les possibles interseccions amb els eixos.
- Trobeu els intervals on creix i decreix i els extrems relatius.
- Trobeu les possibles asímptotes.
- Feu la representació gràfica aproximada de la funció.

[PAU06S4Q1] Sigui  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funció definida per  $f(x) = e^x(ax + b)$ , on  $a$  i  $b$  són nombres reals.

- Calculeu els valors de  $a$  i  $b$  per tal que la funció tingui un extrem relatiu en el punt  $(3, e^3)$
- Per als valors de  $a$  i  $b$  obtinguts, digueu quin tipus d'extrem té la funció en el punt esmentat.

[PAU07J2Q2] La funció derivada  $f'(x)$  de certa funció contínua  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és una funció a trossos formada per les semirrectes del dibuix.



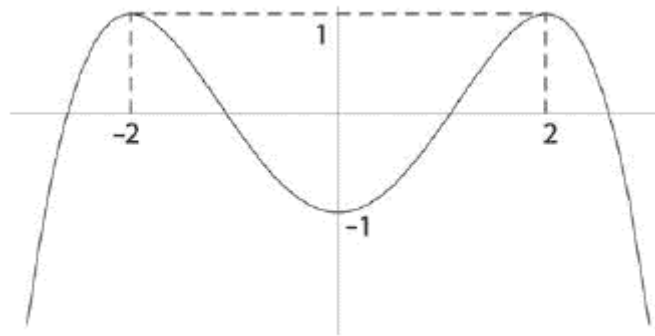
- Digueu si  $f(x)$  és derivable en tots els punts de  $\mathbb{R}$  i per què.
- Estudieu el creixement i el decreixement de  $f(x)$ .
- Trobeu si  $f(x)$  té algun extrem relatiu i, si és així, per a quin valor  $x$  i de quin tipus.
- Sabent que  $f(0)=1$ , calculeu el valor de  $f(1)$ .

Justifiquen totes les respostes.

[PAU07J2Q3] Calculeu els valors del paràmetre  $a$ ,  $a \neq 0$ , que fan que les tangents a la corba d'equació  $y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512$  en els punts d'inflexió siguin perpendiculars.

[PAU07J1Q1] En quin punt la recta tangent a la funció  $f(x) = x \cdot e^x$  és paral·lela a l'eix d'abscisses? Escriviu l'equació de la recta tangent en aquest punt.

[PAU08J2P1] Considereu una funció tal que la seva representació gràfica a l'interval  $(-3, 3)$  és la següent:



- Determineu les abscisses dels punts extrems (màxims i mínims) relatius.
- Estudieu el creixement i decreixement de la funció a l'interval  $(-3, 3)$ .
- Feu un esbós de la gràfica de la derivada d'aquesta funció.
- Sabent que la funció és de la forma  $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ , trobeu de quina funció es tracta.

[PAU08J5Q1] Trobeu els valors dels paràmetres  $a$  i  $b$  per tal que la funció següent sigui contínua i derivable en  $x = 2$ .

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x + 3 & \text{si } x < 2 \\ x^3 + bx + 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

[PAU08J5Q3] Digueu per a quin valor de  $x$  la recta tangent a la corba  $y = \ln(x^2 + 1)$  és paral·lela a la recta  $y = x$ . Escriviu l'equació d'aquesta tangent.

[PAU08S4Q1] Considereu la funció  $f(x) = ax^2 + x + b$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Trobeu els valors de  $a$  i  $b$  que fan que la recta  $y = 2x + 1$  sigui tangent a la gràfica de  $f$  quan  $x = 1$ .

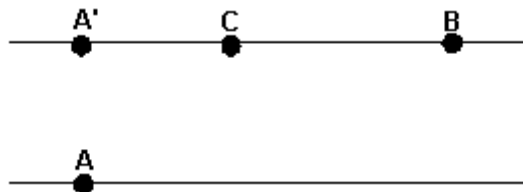
[PAU08S4P1] Donades les funcions  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  i  $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ :

- Comproveu que  $[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$ .
- Comproveu també que  $f'(x) = g(x)$  i  $g'(x) = f(x)$ .
- Comproveu que  $f(x + y) = f(x) \cdot g(y) + f(y) \cdot g(x)$ .
- Calculeu  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  dividint per  $e^x$  el numerador i el denominador; amb un

procediment similar (però no igual), trobeu  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ .

## PROBLEMES D'OPTIMITZACIÓ

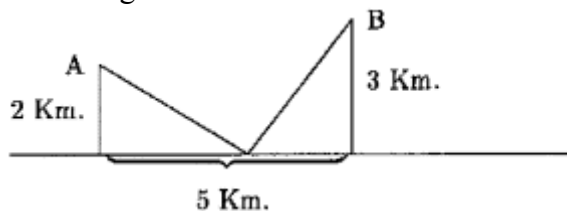
[PAU97J2BP1] Una noia vol travessar el riu Ebre des d'un punt A fins a un punt B, tal com ens indica el dibuix adjunt. Per fer-ho anirà nedant fins a un punt C que encara no sabem quin ha de ser, i des d'allí anirà corrent fins a B. Podem considerar que en aquesta zona el riu té una amplada constant de 300 metres i que la distància entre A i B mesurada sobre el mateix marge del riu és de 4 quilòmetres (sobre el dibuix, distància entre A' i B). Aquesta noia sap que durant tota l'estona que vagi nedant podrà mantenir una velocitat constant de 6 km/h, i que tota l'estona que vagi corrent podrà mantenir una velocitat constant de 12 km/h. Fins a quin punt C haurà d'anar nedant per tal d'arribar al més ràpidament possible a B?



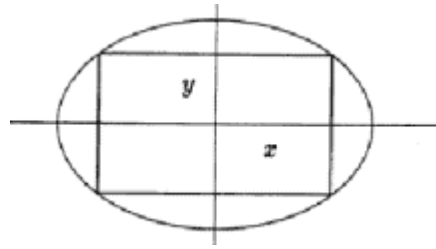
[PAU97J3BQ4] S'ha d'editar un llibre i cada full ha de contenir 18 centímetres quadrats de text. Els marges superior i inferior de cada full han de tenir 2 centímetres cada un, i els marges laterals, 1 centímetre cada un. Calculeu les dimensions de cada full del llibre per tal que la despesa de paper sigui mínima.

[PAU97S4BP1] L'ajuntament d'una ciutat que passa greus dificultats pressupostàries ha decidit acceptar l'oferiment d'una coneguda fàbrica de galetes de contribuir a les despeses del parc municipal a canvi d'instal·lar sis metres de tanca publicitària dins del parc. Aquesta tanca encerclaria una zona que passaria a ser per a ús privat del personal de la fàbrica. Per raons estètiques l'empresa vol que la tanca s'instal·li segons una de les tres possibilitats següents: delimitant un recinte quadrat, delimitant un recinte circular o bé dos recintes, un de circular i l'altre de quadrat. Suposant que a l'ajuntament l'interessa preservar el màxim de superfície del parc per a ús públic, decidiu quina de les tres possibilitats és la millor i quina seria l'àrea (mínima) de parc que es perdria per a ús públic.

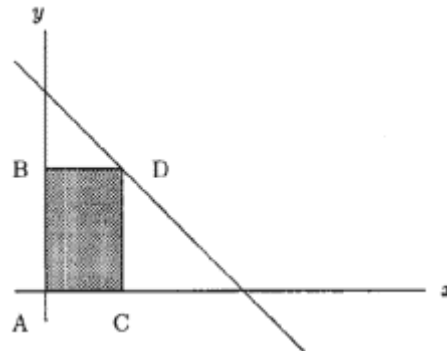
[PAU98J3P2] Una via de tren passa a 2 km del poble A i a 3 km del poble B, de manera que el tram de via comprès entre ambdós pobles és de 5 km, tal com s'indica en la figura. Volem construir una nova estació ferroviària i una carretera formada per dos trams rectes que uneixi A amb B passant per l'estació. En quin punt del tram de via hem de col·locar l'estació si volem que el recorregut de A a B passant per la nova carretera sigui mínim? Quina serà la longitud total de la nova carretera?



[PAU98J6Q1] Trobeu els costats d'un rectangle d'àrea màxima inscrit a l'el·lipse d'equació  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ , tal com s'indica en la figura següent:



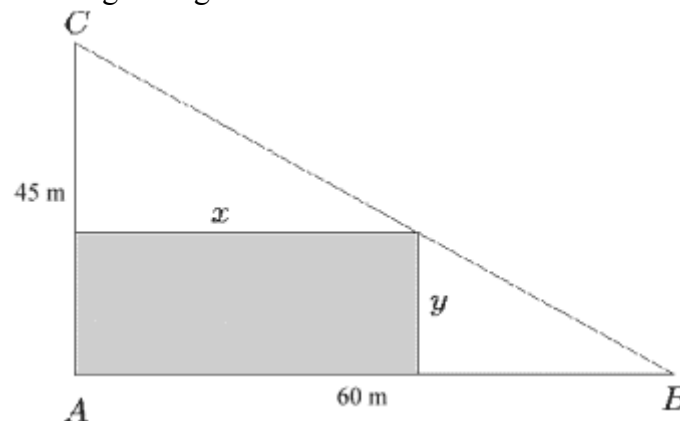
[PAU98S5Q2] Considereu els rectangles del pla, els vèrtexs  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  dels quals compleixen les condicions següents: a)  $A$  és l'origen de coordenades; b)  $B$  és a sobre del semieix de les  $y$ ; c)  $C$  és a sobre del semieix de les  $x > 0$ ; d)  $D$  és a sobre de la recta d'equació  $2x + y = 1$ , tal com es veu en la figura següent:



De tots aquests rectangles, trobeu l'àrea del que la té màxima.

[PAU99S5P1] Trobeu l'altura i el radi de la base del cilindre de volum màxim inscrit en una esfera de radi 1.

[PAU00J1P1] Un terreny té forma de triangle rectangle, els catets mesuren  $AB = 60$  m i  $AC = 45$  m. En aquest terreny es pot construir una casa de planta rectangular com indica la part ombrejada de la figura següent:



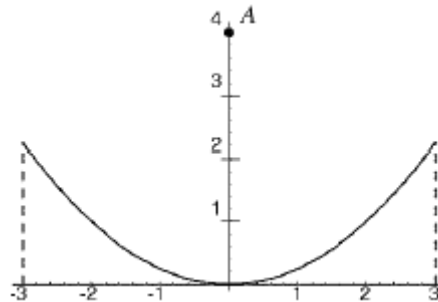
Voleu vendre aquest terreny i us paguen 5.000 pessetes per cada metre quadrat no edificable i 25.000 pessetes per cada metre quadrat edificable.

- Determineu la relació que hi ha entre l'amplada  $x$  i la profunditat  $y$  del rectangle que determina la part edificable.
- Determineu l'expressió que dóna el valor del terreny en funció de l'amplada  $x$  del rectangle edificable.
- Quines són les dimensions de la part edificable que ens permeten obtenir un valor màxim per a aquest terreny?
- Quin és aquest valor màxim?

[PAU00S2P1] El costat desigual d'un triangle isòsceles mesura 12 m, i l'altura sobre aquest costat és de 5 m.

- Donat un punt arbitrari sobre aquesta altura, obtingueu una expressió de la suma de les distàncies d'aquest punt a cada un dels vèrtexs del triangle.
- Determineu els punts sobre l'altura que compleixen que la suma de les distàncies als tres vèrtexs del triangle sigui màxima i els punts per als quals sigui mínima.

[PAU01S4P1] La riba d'un tram de riu descriu la corba  $y = \frac{1}{4}x^2$ , per a  $x$  entre  $-3$  i  $3$ , i en el punt  $A = (0, 4)$  hi ha un poble, tal com es pot veure en l'esquema següent:

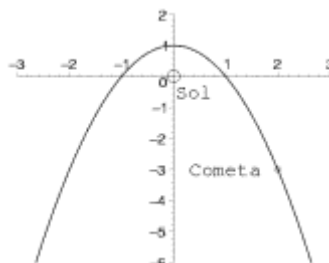


- Expresseu la distància des d'un punt qualsevol d'aquesta vora del riu fins al poble, en funció de l'abscissa  $x$ .
- Quin és el punt de la vora d'aquest tram de riu que és més lluny del poble?
- Hi ha algun punt de la vora del riu a una distància del poble inferior a 2?

[PAU02J3P1] S'ha de construir un gran dipòsit cilíndric de  $81\pi \text{ m}^3$  de volum. La superfície lateral ha de ser construïda amb un material que costa 30 € el  $\text{m}^2$  i les dues bases amb un material que costa 45 € el  $\text{m}^2$ .

- Determineu la relació que hi haurà entre el radi  $r$  de les bases circulars i l'altura  $h$  del cilindre, i doneu el cost  $C(r)$  del material necessari per construir aquest dipòsit en funció de  $r$ .
- Quines dimensions (radi i altura) ha de tenir el dipòsit perquè el cost del material necessari per construir-lo sigui el mínim possible?
- Quin serà, en aquest cas, el cost del material?

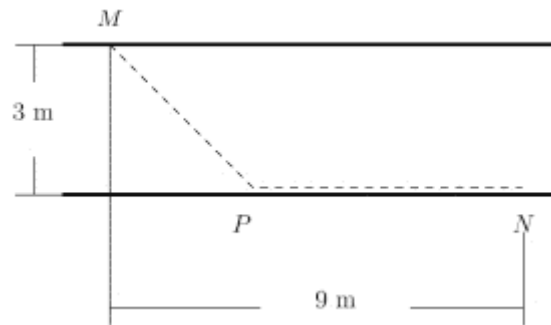
[PAU02S1P1] Suposem que el Sol es troba a l'origen d'un sistema de coordenades i que un cometa segueix una trajectòria donada per la paràbola  $y = 1 - x^2$ , tal com es veu a la figura següent:



- Quin és el punt en què el cometa es troba més proper al Sol?
- Quant val en aquest cas la distància del Sol al cometa?
- Hi ha algun punt en què el cometa es trobi a la màxima distància del Sol?
- Hi ha algun punt en què la distància entre el Sol i el cometa sigui un màxim local o relatiu?

Nota: Teniu present que la distància entre dos punts és màxima o mínima quan el quadrat de la distància és màxim o mínim.

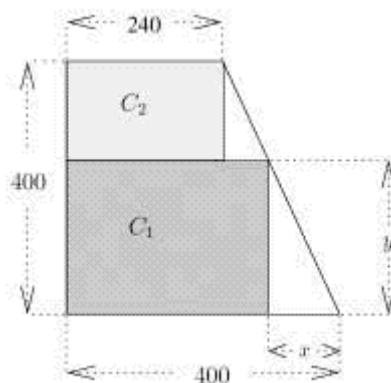
[PAU03J2P1] Volem unir el punt  $M$  situat en un costat d'un carrer de 3 m d'amplada amb el punt  $N$  situat a l'altre costat i 9 m més avall mitjançant dos cables rectes, un des de  $M$  fins a un punt  $P$  situat a l'altre costat del carrer i un altre des de  $P$  fins a  $N$  seguint el mateix costat del carrer, segons l'esquema següent:



El cost de la instal·lació del cable  $MP$  és de 12 € per metre i del cable  $PN$  de 6 € per metre. Quin punt  $P$  haurem d'escollir de manera que la connexió de  $M$  amb  $N$  sigui tan econòmica com sigui possible? Quin serà aquest cost mínim?

[PAU03J5Q1] Determineu quin és el punt de la gràfica de  $y = \sqrt{x}$  (és a dir, de la forma  $(x, \sqrt{x})$ ), que és més a prop del punt  $P = (4, 0)$ .

[PAU03S3P1] Un camp té forma de trapezi rectangle, de bases 240 m i 400 m, i el costat perpendicular a les bases també de 400 m. Es vol partir tal com indica la figura per fer dos camps rectangulars  $C_1$  i  $C_2$ . Anomenem  $x$  i  $y$  els catets d'un dels triangles rectangles que es formen.



- Comproveu que  $y = \frac{5}{2}x$ .
- Utilitzant la igualtat anterior, escriviu la suma de les àrees dels dos camps en funció de  $x$ .
- El camp  $C_1$  es vol sembrar amb blat de moro i el camp  $C_2$  amb blat. Amb el blat de moro s'obté un benefici de 0,12 € per  $m^2$  i amb el blat un benefici de 0,10 € per  $m^2$ . Determineu les mides de cada un dels camps per obtenir el benefici màxim.

[PAU04J1P2]6. Donats la funció  $f(x) = \sqrt{x}$  i el punt  $A(2, 0)$  situat sobre l'eix de les abscisses:

- Trobeu la funció que expressa la distància del punt  $A$  a un punt qualsevol de la gràfica de la funció.

b) Trobeu les coordenades del punt de la gràfica de  $f(x)$  més proper a  $A$ .

[PAU04J4Q3] El consum d'un cotxe depèn de la seva velocitat  $v$  (expressada en km/h) segons la funció  $f(v) = \frac{3e^{0,012v}}{v}$  (en litres/km). Quina és la velocitat més econòmica?

[PAU05J1P1] La recta tangent a la paràbola  $y = 3 - x^2$  en un punt  $M$  situat dins del primer quadrant ( $x > 0, y > 0$ ), talla l'eix  $OX$  en el punt  $A$  i l'eix  $OY$  en el punt  $B$ .

a) Feu un gràfic dels elements del problema.

b) Trobeu les coordenades del punt  $M$  que fan que el triangle  $OAB$  tingui l'àrea mínima.

[PAU05S3P1] Considereu la funció  $f(x) = 3 - x^2$  i un punt de la seva gràfica,  $M$ , situat en el primer quadrant ( $x \geq 0, y \geq 0$ ). Si pel punt  $M$  tracem paral·leles als eixos de coordenades, la seva intersecció amb  $OX$  i  $OY$  determina dos punts,  $A$  i  $B$ , respectivament.

a) Feu un gràfic dels elements del problema.

b) Trobeu les coordenades del punt  $M$  que fa que el rectangle  $OAMB$  tingui l'àrea màxima.

[PAU07J2P1] Un magatzem té forma de prisma recte de base quadrada i un volum de  $768 \text{ m}^3$ . Se sap que la pèrdua de calor a través de les parets laterals val 100 unitats per  $\text{m}^2$ , mentre que a través del sostre és de 300 unitats per  $\text{m}^2$ . La pèrdua pel sòl és molt petita i es pot considerar nul·la. Calculeu les dimensions del magatzem perquè la pèrdua de calor total sigui mínima.

[PAU08J5P2] De tots els triangles rectangles d'hipotenusa 10 cm, trobeu la longitud dels catets del triangle que té el perímetre màxim. Comproveu que la solució trobada correspongui realment al perímetre màxim.

## CÀLCUL INTEGRAL

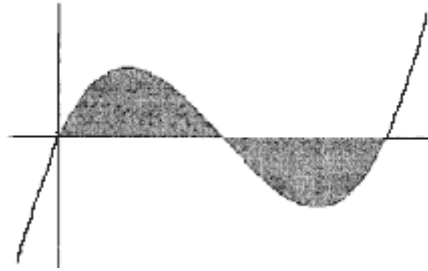
[PAU97J2AQ2] Calculeu els valors de  $m$  de manera que la recta  $y = mx$  i la paràbola  $y = x^2$  delimitin una àrea de 36 unitats de superfície.

[PAU97S1BQ2] Calculeu l'àrea que en el primer quadrant tanquen les corbes  $y = x^2$ ,  $y = 4x^2$  i  $y = 16$ .

[PAU97S4AQ2] Què vol dir que una funció  $F(x)$  sigui primitiva d'una altra funció  $f(x)$ ? Quantes primitives té una determinada funció? Calculeu la primitiva de la funció

$\cot(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$  (cotangent de  $x$ ) que compleix la condició que la seva gràfica passa pel punt  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

[PAU98J3Q3] Considereu la funció  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$  la gràfica de la qual és aproximadament la del dibuix següent:



Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.

[PAU98S5Q1] Trobeu el valor de  $k$  per tal que

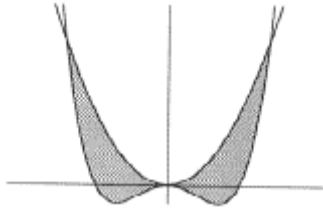
$$\int_{k+1}^{2k} \frac{dx}{x-k} = 3$$

[PAU98S2Q3] Calculeu l'àrea limitada per les corbes  $y = e^x$ ,  $y = e^{-x}$  i la recta vertical  $x = 2$ .

[PAU99J1Q2] Calculeu l'àrea determinada per les corbes d'equacions

$$y = x^4 - 2x^2 \quad \text{i} \quad y = 2x^2$$

representada en el dibuix següent:

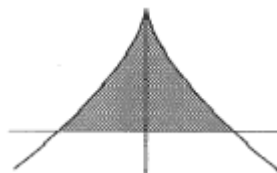


[PAU99J1Q3] Calculeu raonadament l'expressió d'una funció  $f(x)$  tal que  $f'(x) = xe^{-x^2}$  i que  $f(0) = \frac{1}{2}$ .

[PAU99J1P1] Donada la funció  $f(x) = x - 4 + \frac{16}{x+4}$

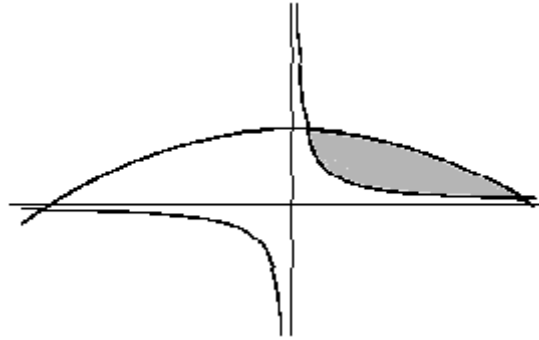
- Estudieu-ne la continuïtat.
- Estudieu-ne els intervals de creixement i decreixement i els màxims i mínims locals.
- Calculeu l'àrea limitada per la gràfica de la funció, l'eix  $OX$  i les rectes verticals  $x = 0$  i  $x = 2$ .

[PAU99J6Q2] Sigui  $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ . Calculeu l'àrea de la regió que limita la gràfica de  $f(x)$  i l'eix d'abscisses i que està representada en el dibuix següent:



[PAU99S5Q3] Trobeu el valor del coeficient  $k$  de manera que l'àrea limitada per la funció  $f(x) = -x^2 + k$  i l'eix d'abscisses sigui igual a  $36 \text{ u}^2$ .

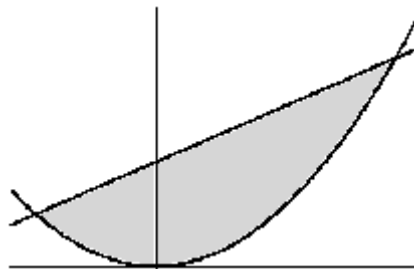
[PAU00J1Q2] Calculeu l'àrea que té l'únic recinte tancat limitat per les gràfiques de les funcions  $y = -x^2 + 7$  i  $y = \frac{6}{x}$  representat en el dibuix següent:



[PAU00J3Q1] El polinomi  $p(x) = x^2 + ax + b$  s'anul·la per a  $x = 2$  i compleix  $\int_0^2 p(x) dx = 4$ .

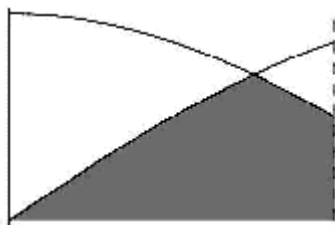
Calculeu raonadament  $a$  i  $b$ .

[PAU00S2Q2] Calculeu per integració la superfície del recinte delimitat per les corbes  $y = x^2$  i la recta d'equació  $y - x - 6 = 0$  representat en el dibuix següent:



[PAU01S2Q1] a) Quin és l'angle  $x$  en radians ( $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ) tal que  $\sin(x) = \cos(x)$ ?

b) Considereu les funcions  $f(x) = \sin(x)$  i  $g(x) = \cos(x)$ . Calculeu la superfície del recinte delimitat superiorment per les gràfiques d'aquestes funcions, inferiorment per l'eix d'abscisses i lateralment per les rectes verticals  $x = 0$  i  $x = \frac{\pi}{3}$  representat en l'esquema següent:



[PAU01S5Q4] Calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de la funció  $f(x) = xe^x$  per a  $x \geq 0$ , l'eix d'abscisses i la recta vertical  $x = 1$ .

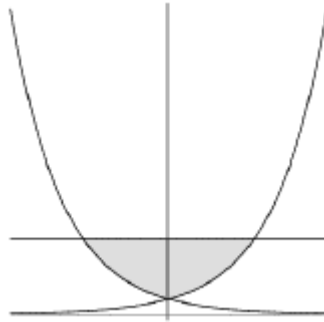
[PAU01S4Q4] Sabeu que la gràfica de la funció  $f(x)$  passa pel punt  $(1, -4)$  i que la seva funció derivada és  $f'(x) = 2x - 2$ .

a) Determineu l'expressió de  $f(x)$ .

b) Calculeu l'àrea de la regió limitada per la gràfica de  $f(x)$  i l'eix d'abscisses  $OX$ .

[PAU02J3Q1] Calculeu la primitiva de la funció  $f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$  que s'anul·la en el punt d'abscissa  $x = 2$ .

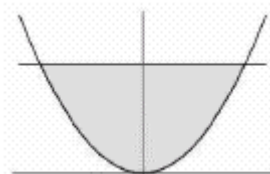
[PAU02J2Q1] Calculeu l'àrea compresa entre les gràfiques de les corbes  $y = e^{2x}$  i  $y = e^{-2x}$  i la recta  $y = 5$  representada en l'esquema següent:



[PAU02S1Q1] Calculeu el valor positiu de  $a$  que fa que l'àrea compresa entre la recta d'equació  $y = ax + 2a$  i la paràbola  $y = ax^2$  valgui 18.

[PAU03J2Q2] Calculeu  $\int_1^e \frac{2 \ln^3 x}{x} dx$

[PAU03J5Q3] Considerem la regió  $S$  del pla limitada per la paràbola  $y = 3x^2$  i la recta  $y = 3$  representada en l'esquema següent:



Siguin  $A$  i  $B$  els punts d'intersecció de la recta i la paràbola, i  $T$  el triangle que té per vèrtexs  $A$ ,  $B$  i l'origen de coordenades  $(0, 0)$ . Calculeu l'àrea de la regió que resulta quan es treu el triangle  $T$  a la regió  $S$ .

[PAU03S3Q1] Donada  $f(x) = (2x + 1)e^{(x^2+x)}$ , determineu la funció  $g(x)$  tal que  $g'(x) = f(x)$  (és a dir, una primitiva de  $f(x)$ ) i que el seu gràfic passa pel punt  $(0, 2)$ .

[PAU04J3Q2] Donada la funció  $f(x) = \cos x - \cos^3 x$ :

a) trobeu la seva integral indefinida;

b) quina és la primitiva de  $f(x)$  que passa pel punt  $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

Indicació: recordeu que  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

[PAU04J1P1] Considereu la funció  $f(x) = x^3 + mx^2 + 1$ ,  $m \geq 0$ .

- Calculeu el valor de  $m$  per tal que l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció, l'eix  $OX$  i les rectes  $x = 0$  i  $x = 2$  sigui de 10 unitats quadrades.
- Per a  $m = 1$ , indiqueu el punt o els punts on la recta tangent a la gràfica de la funció forma un angle de  $45^\circ$  amb el semieix positiu de  $OX$ .

[PAU04J4Q2] Calculeu l'àrea del recinte tancat que delimiten la gràfica de la funció  $y = \sqrt{2x}$  i la recta  $y = x$ .

[PAU04S5Q1] Calculeu el valor de la integral següent:  $\int_0^3 \frac{x+1+\sqrt{x+1}}{x+1} dx$

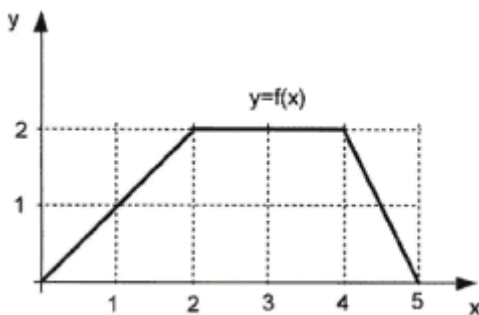
[PAU05J4Q2] Donada la funció  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{5x^2 - 4}}$

- Calculeu la integral  $\int f(x) dx$ .
- Trobeu la primitiva  $F$  de  $f$  que compleixi  $F(1) = 1$ .

[PAU05J1P2] Considereu la funció  $f(x) = 4x - x^2$

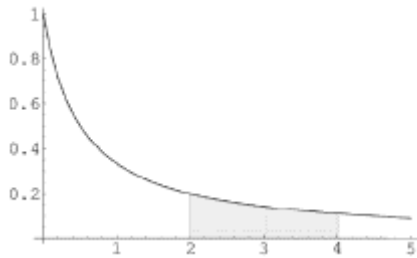
- Calculeu l'equació de les rectes tangents a la gràfica de  $f$  en els punts d'abscisses  $x = 0$  i  $x = 4$ .
- Feu un gràfic dels elements del problema.
- Calculeu l'àrea compresa entre la gràfica de  $f$  i les rectes tangents que heu trobat a l'apartat a).

[PAU06J3Q2] Considereu la funció  $y = f(x)$  definida per a  $x \in [0,5]$  que apareix dibuixada a la figura adjunta



- Quina és l'expressió de la seva funció derivada quan existeix?
- Calculeu  $\int_0^3 f(x) dx$

[PAU06S4Q2] El gràfic de la funció  $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ , quan  $x > 0$ , és com segueix



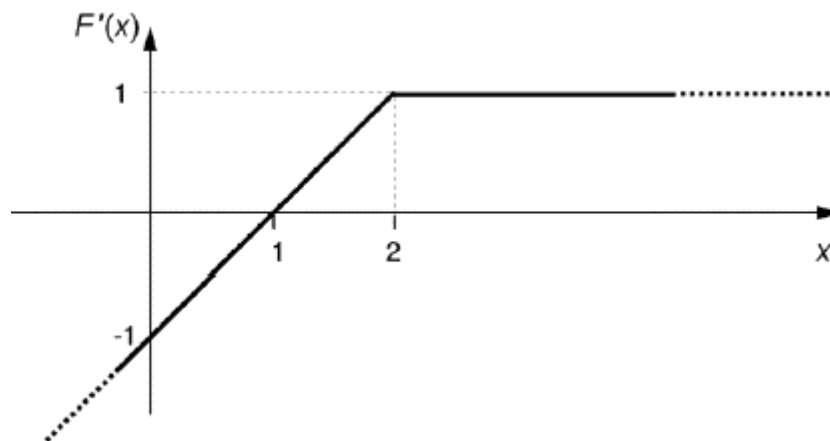
- Trobeu una primitiva de la funció  $f$ .
- Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.

[PAU06S4P1] Considereu la paràbola d'equació  $y = x^2 + 2x - 3$

- Calculeu les equacions de les rectes tangents a la paràbola en els punts d'abscissa  $x = -1$  i  $x = 1$ .
- Calculant el mínim de la funció  $y = x^2 + 2x - 3$ , trobeu el vèrtex de la paràbola.
- Trobeu les interseccions de la paràbola amb els eixos i feu una representació gràfica de la paràbola i de les tangents obtingudes al primer apartat.
- Calculeu l'àrea compresa entre la paràbola i les rectes tangents.

[PAU07J1Q3] Busqueu els extrems relatius i els punts de tall amb els eixos, i feu una representació aproximada de la corba d'equació  $y = x^4 - x^2$ . A continuació, calculeu l'àrea del recinte tancat per aquesta corba i l'eix d'abscisses.

[PAU07S3Q4] La funció derivada  $F'(x)$  d'una funció contínua  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que passa per l'origen és una funció a trossos formada per les semirectes del dibuix.



Escriviu l'expressió de la funció  $F(x)$  com una funció a trossos.

[PAU07S3P2] Donades les funcions  $f(x) = x^2 - ax - 4$  i  $g(x) = \frac{x^2}{2} + b$ :

- Calculeu  $a$  i  $b$  de manera que les gràfiques de  $f(x)$  i de  $g(x)$  siguin tangents en el punt d'abscissa  $x = 3$ , és a dir, que tinguin la mateixa recta tangent en aquest punt.
- Trobeu l'equació de la recta tangent esmentada en l'apartat anterior.
- Pel valor de  $a$  obtingut en el primer apartat, calculeu el valor de l'àrea de la regió limitada per l'eix d'abscisses  $OX$  i la funció  $f(x)$ .

[PAU08J2Q1] Se sap que certa funció derivable  $F(x)$  verifica les condicions següents:

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \text{ i } F(1) = 3$$

a) Trobeu  $F(x)$ .

b) Calculeu l'àrea compresa entre  $F(x)$  i l'eix  $OX$  des de  $x = 0$  fins a  $x = 1$ .

## MATRIUS I SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

[PAU97S4BQ4] Expliqueu què vol dir que un sistema d'equacions lineals sigui compatible i què vol dir que sigui indeterminat. Poden haver-hi sistemes que siguin a la vegada incompatibles i indeterminats? Digueu finalment per a quins valors del paràmetre  $a$  el sistema d'equacions següent és indeterminat, i per a quins valors de  $a$  és incompatible:

$$\left. \begin{array}{l} a^2x + y = 0 \\ x + 3y + z = a \\ -x + y + z = 1 \end{array} \right\}$$

[PAU98J3Q1] Donada la matriu  $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , utilitzeu la matriu inversa  $B^{-1}$  per trobar

una matriu  $X$  tal que  $B \cdot X \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ .

[PAU98S5Q4] Discutiu el sistema d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} ax - y + 2z = (2 - a) \\ 2x + 3y - z = -3a \\ x + 2y - z = -2a \end{array} \right\}$$

segons els valors del paràmetre  $a$ .

[PAU99J1Q1] Resoleu el sistema següent per als valors de  $k$  que el facin compatible

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = k \end{array} \right\}$$

[PAU00J1Q3] Donat el sistema d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \end{array} \right\}$$

a) Afegiu-hi una equació lineal de manera que el sistema resultant sigui incompatible.

b) Afegiu-hi una equació lineal de manera que el sistema resultant sigui compatible indeterminat. Resoleu el sistema que s'obtingui.

[PAU00J3Q3] Se sap que el sistema d'equacions

$$\left. \begin{aligned} x + y - az &= -2 \\ 2x + y - 8z &= -1 \\ -x - 2y + 10z &= 5 \end{aligned} \right\}$$

té més d'una solució.

Calculeu  $a$  i digueu quina és la interpretació geomètrica que té el conjunt de totes les solucions d'aquest sistema.

[PAU03J2Q4] Per a quin o quins valors del paràmetre real  $\lambda$  el sistema d'equacions

$$\left. \begin{aligned} x + 2y + (\lambda + 2)z &= 0 \\ x + (2\lambda)y + 3z &= 0 \\ 2x - z &= 4 \end{aligned} \right\}$$

és compatible i indeterminat?

[PAU03J5Q4] Considereu el sistema d'equacions

$$\left. \begin{aligned} ax + y + z &= a + 1 \\ 2x - y + az &= a + 2 \\ x - y + z &= 4 \end{aligned} \right\}$$

on  $a$  és un paràmetre.

Si  $x = 1, y = -1, z = 2$  és una solució, quin és el valor del paràmetre  $a$ ?

[PAU04J3P1] Donat el sistema

$$\left\{ \begin{aligned} y + z &= -2 \\ -2x + y + z &= -1 \\ (2 - 2m)x + (2m - 2)z &= m - 1 \end{aligned} \right.$$

on  $m$  és un paràmetre:

- discuti el sistema segons els valors de  $m$ ;
- resoleu els casos compatibles;
- en cada un dels casos de la discussió de l'apartat a), feu una interpretació geomètrica del sistema.

[PAU04J1Q1] La matriu ampliada d'un sistema d'equacions lineals, un cop reduïda pel mètode de Gauss, és

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- El sistema, és compatible o incompatible? Raoneu la resposta.
- En cas que sigui compatible resoleu-lo.

[PAU04J1Q3] Considereu les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Trobeu una matriu  $X$  que compleixi  $A \cdot X + A = B$ .

[PAU04J4P1] Considereu el vector  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  i la matriu  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

a) Trobeu tots els vectors  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  que fan que  $A \cdot \vec{v} = \vec{w}$ .

b) Quina condició han de complir  $a$ ,  $b$  i  $c$  per tal que  $A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  no tingui cap vector  $\vec{v}$

solució?

[PAU04S5Q3] Donades les matrius  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ :

a) trobeu una matriu  $X$  tal que  $A \cdot X = B$ ;

b) calculeu  $B^{100}$ . Raoneu la resposta.

[PAU05J4Q1] Donades les matrius  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , on  $a$  i  $b$  són nombres

reals, trobeu els valors de  $a$  i  $b$  que fan que les dues matrius commutin, és a dir, que fan que es compleixi  $A \cdot B = B \cdot A$

[PAU05J4P1] De tres nombres,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , sabem el següent: que el primer més el segon sumen 0; que el primer més el tercer sumen 1; que la suma de tots tres és 0 i, per acabar, que el primer multiplicat per un nombre  $k$  més el doble de la suma del segon i del tercer dóna 1.

a) Què podeu dir del valor de  $k$ ?

b) Quant valen els tres nombres?

[PAU05J1Q1] Considereu el sistema següent en funció del paràmetre real  $a$ :

$$\begin{cases} x - ay = 1 \\ ax + y = 3 \end{cases}$$

a) Discussiu-lo en funció del paràmetre  $a$ .

b) Resoleu els casos compatibles.

[PAU05J1Q2] La matriu següent expressa els preus unitaris, en euros, de quatre articles,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$ , procedents de les fàbriques f1, f2 i f3:

$$P = \begin{pmatrix} 34 & 40 & 36 \\ 11 & 8 & 12 \\ 23 & 27 & 32 \\ 25 & 21 & 30 \end{pmatrix}$$

Si una comanda és representada per un vector fila  $C = (x \ y \ z \ t)$ , què representa cadascun dels elements del resultat del producte  $C \cdot P$ ? Si volem comprar 25 unitats de  $A$ , 30 de  $B$ , 60 de  $C$  i 75 de  $D$ , quina de les fàbriques ens ofereix el millor preu?

[PAU05S3Q1] En un sistema hi ha, entre d'altres, aquestes dues equacions:

$$x + 2y - 3z = 5 \quad \text{i} \quad 2x + 4y - 6z = -2$$

Què podeu dir de les solucions del sistema?

[PAU06J1Q2] Esbrineu si el sistema següent pot ser compatible indeterminat per a algun valor del paràmetre  $m$ .

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{array} \right\}$$

És incompatible per a algun valor de  $m$ ?

[PAU06J1Q3] Donades les matrius  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calculeu  $A \cdot B$  i  $B \cdot A$

b) Comproveu que  $(A + B)^2 = A^2 + B^2$

[PAU06J3Q4] Sigui la matriu  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$ . Determineu els valors de  $m$  per als

quals  $\text{rang}(A) < 3$ . Pot ser  $\text{rang}(A) = 1$  per a algun valor de  $m$ ?

[PAU06S4P2] Considereu el sistema d'equacions 
$$\begin{cases} px + 7y + 8z = 1370 \\ x + y + z = 200 \\ 7x + py + 8z = 1395 \end{cases}$$

a) Discutiu-lo en funció del paràmetre  $p$ .

b) Doneu la interpretació geomètrica en els casos en què el sistema és incompatible.

c) Resoleu el sistema per a  $p = 6$ .

[PAU07J1P2] Discutiu el sistema següent 
$$\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x + py + 2z = 10 \\ px + 6y + 3z = 12 \end{cases}$$
 en funció del paràmetre

$p$ . Doneu la interpretació geomètrica del sistema en cada cas i resoleu-lo quan sigui compatible.

[PAU07S3Q3] Considereu la matriu  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$ . Trobeu els valors de  $p$  i  $q$  que fan que es verifiqui  $A^2 = A$ . En aquest cas, raoneu sense calcular què val  $A^{10}$ .

[PAU08J2Q2] Considereu les matrius  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  i  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ .

a) Trobeu la matriu  $M$ , quadrada d'ordre 2, tal que  $M \cdot A = B$ .

b) Comproveu que  $M^2 = I_2$  (matriu identitat d'ordre 2) i deduiu l'expressió de  $M^n$ .

[PAU08J2Q3] Discutiu el sistema d'equacions lineals següent en funció dels valors del paràmetre  $m$ .

$$\begin{cases} x + y + (m-1)z = 1 \\ x + (m-1)y + z = m-1 \\ (m-1)x + y + z = m+2 \end{cases}$$

[PAU08J5Q2] Considereu la matriu  $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$ , on  $a$  i  $b$  són nombres reals.

a) Calculeu el valor de  $a$  i  $b$  per tal que  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

b) Segons els valors obtinguts en l'apartat anterior, calculeu  $A^3$  i  $A^4$ .

c) Si  $n$  és un nombre natural qualsevol, doneu l'expressió de  $A^n$  en funció de  $n$ .

[PAU08J5P1] Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} 2x + y - (a-1)z = 4 \\ x - 2y + z = -4 \\ 4x - (a+1)y + z = -2a \end{cases}$$

a) Discutiu-lo en funció del paràmetre  $a$ .

b) Resoleu-lo quan sigui compatible indeterminat.

c) En el cas de l'apartat anterior, trobeu una solució del sistema en què  $x$ ,  $y$  i  $z$  tinguin valors enters.

[PAU08S4Q2] Considereu la matriu  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

a) Calculeu  $A^2$  i  $A^3$ .

b) Determineu, raonadament, el valor de  $A^{60124}$ .

[PAU08S4Q3] Considereu un sistema de dues equacions amb tres incògnites.

a) Pot ser incompatible?

b) Pot ser compatible determinat?

Raoneu les respostes.

## GEOMETRIA DE L'ESPAI

[PAU97J2BQ3] Estudieu la posició relativa de les dues rectes  $r$  i  $s$  de l'espai donades per les equacions següents:

$$r : \begin{cases} 2x + z = 9 \\ y = 1 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = -y \\ 2y + z = -3x + 5 \end{cases}$$

[PAU97J3AQ4] Estudieu, segons els diferents valors que pot tenir el paràmetre  $m$ , les posicions relatives del pla  $p$  i de la recta  $r$  que es donen a continuació:

$$p: mx - 3y + 2z = 1 \quad r: \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - y + mz = 1 \end{cases}$$

[PAU97S1AQ2]. a) Si  $A$ ,  $B$  i  $M$  són tres punts de l'espai que compleixen la relació

$$\overrightarrow{MA} = -2 \overrightarrow{AM}$$

diguen quin serà el valor de  $r$  a l'expressió

$$\overrightarrow{MA} = r \overrightarrow{MB}$$

b) Si la relació anterior entre vectors s'hagués produït al pla i les coordenades de  $A$  i  $B$  fossin respectivament  $(3, -5)$  i  $(-5, 7)$ , quines serien les coordenades del punt  $M$ ? Justifiqueu la resposta.

[PAU97S4AQ3] Un vector  $\vec{v}$  de l'espai forma un angle de 60 graus amb l'eix de les  $x$  i de 30 graus amb l'eix de les  $y$ . Sabent que les seves dues primeres coordenades són positives i que el seu mòdul és 7, calculeu les seves tres coordenades.

[PAU97S4BQ3] Considereu els punts de l'espai  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(1, 1, 2)$  i  $B(1, -1, 3)$ . Expresseu el vector  $OA$  com a suma d'un vector de la mateixa direcció que  $OB$  i d'un vector perpendicular a  $OB$ . Calculeu la distància del punt  $A$  a la recta determinada per  $O$  i per  $B$ .

[PAU98J3Q2] Trobeu les equacions d'un pla paral·lel al pla d'equació  $2x - 2y + z - 8 = 0$  i que dista d'aquest sis unitats. N'hi ha més d'un, de pla, que compleixi aquestes condicions?

[PAU98J6Q3] Sigui  $\pi$  el pla de l'espai que passa pel punt  $(0, 0, 3)$  i que conté els vectors  $\vec{u} = (1, 2, -5)$  i  $\vec{v} = (2, 1, -3)$ . Sigui  $r$  la recta d'equacions:

$$\left. \begin{aligned} 4x - y + z &= 0 \\ 2x + y + z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

- Escriviu l'equació cartesiana de pla  $\pi$  (equació de la forma  $ax + by + cz = d$ ).
- Estudieu la posició relativa de  $r$  respecte a  $\pi$  (heu de dir si  $r$  és paral·lela a  $\pi$ , si està continguda en  $\pi$  o bé si talla  $\pi$ )

[PAU98J6Q4] a) Sigui  $P$  un punt de l'espai, i  $\pi$ , un pla. Definiu el concepte de distància del punt  $P$  al pla  $\pi$ .

b) Sigui  $P$  en punt de coordenades  $(1, 1, 0)$ , i  $\pi$ , el pla d'equació  $x + y + z = 5$ . Trobeu la distància de  $P$  a  $\pi$ .

[PAU98S5P2] Donat el pla  $\pi$  d'equació  $x + 4y + z = 8$  i sent  $A$ ,  $B$  i  $C$  els punts d'intersecció d'aquest pla amb els eixos de coordenades  $OX$ ,  $OY$  i  $OZ$ , respectivament:

- Determineu les coordenades dels punts  $A$ ,  $B$  i  $C$ .
- Determineu les equacions de la recta perpendicular al pla  $\pi$  que passa per l'origen de coordenades.
- Calculeu el volum del tetràedre determinat per  $OABC$ , on  $O$  és l'origen de coordenades.
- Calculeu la distància de l'origen de coordenades al pla  $\pi$ . Determineu l'àrea del triangle  $ABC$  (podeu utilitzar el volum calculat en l'apartat anterior).

[PAU98S2Q2] Donat el pla  $\pi$  d'equació  $2x - y + 2z = 4$  i el punt  $H = (1, 3, -2)$ , determineu les coordenades de la projecció ortogonal de  $H$  sobre  $\pi$ . (Recordeu que la projecció ortogonal d'un punt  $H$  sobre un pla  $\pi$  és el peu de la perpendicular a  $\pi$  traçada des de  $H$ .)

[PAU99J1P2] Donat el tetràedre de vèrtexs  $A = (0, 0, 0)$ ,  $B = (1, 1, 1)$ ,  $C = (3, 0, 0)$  i  $D = (0, 3, 0)$

- Calculeu l'equació del pla que conté la cara  $BCD$  i la del pla que conté la cara  $ACD$ .
- Calculeu les equacions de dues de les altures del tetràedre, la que passa pel vèrtex  $A$  i la que passa pel vèrtex  $B$ , respectivament. (Nota: altura d'un tetràedre és la recta que passa per un vèrtex i és perpendicular al pla que determina la cara oposada.)
- Comproveu que les dues altures anteriors es tallen en un punt  $P$ .
- Comproveu si la recta que uneix qualsevol vèrtex del tetràedre amb  $P$  és perpendicular a la cara oposada (i és, per tant, una altura del tetràedre).

[PAU99J6Q4] Considereu les rectes  $r: \frac{x-1}{2} = y = z - 2$  i  $s: \begin{cases} x - 2z = 5 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$

Comproveu que aquestes dues rectes són paral·leles i calculeu l'equació del pla que les conté.

[PAU99S2Q2] Considereu la recta  $r$  de l'espai d'equacions

$$\frac{x-3}{2} = y = \frac{z+1}{2}$$

Trobeu l'equació cartesiana del pla que conté  $r$  i que passa pel punt  $P = (1, 1, 1)$  (equació cartesiana vol dir la de la forma  $ax + by + cz = d$ ).

[PAU99S2Q3] Si el rang de la matriu d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites és 2 i el de la matriu ampliada és 3, quines interpretacions geomètriques podeu donar a aquest sistema? Doneu un exemple de sistema amb aquestes característiques i la seva interpretació geomètrica.

[PAU99S2P2] Donats els punts de l'espai  $A = (2, 1, 0)$ ,  $B = (0, 2, 0)$ ,  $C = (-3, 0, 0)$  i  $D = (0, -1, 0)$

- Són coplanaris? Formen un paral·lelogram?
- Calculeu l'àrea del polígon  $ABCD$ .
- Calculeu el punt simètric del punt  $E = (1, 1, 2)$  respecte del pla que determinen  $A$ ,  $B$  i  $C$ .
- Calculeu la distància entre la recta que passa per  $E$  i  $A$  i la recta que passa per  $B$  i  $C$ .

[PAU99S5Q2] Donades les rectes  $r_1: \begin{cases} 4x - y - z = 0 \\ 2x + y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$  i  $r_2: x = \frac{y}{3} = z$

Calculeu l'equació del pla paral·lel a les dues rectes que passa per l'origen.

[PAU00J1P2] Donats el pla  $\pi$  d'equació  $x + 2y + 3z - 1 = 0$ , la recta  $r$  d'equacions

$$\begin{cases} x = 2z - 3 \\ y = z + 4 \end{cases} \text{ i el punt } P = (2, 1, 1), \text{ calculeu:}$$

- Unes equacions de la recta que passa per  $P$  i és perpendicular a  $\pi$ .

- b) L'equació del pla que passa per  $P$  i és perpendicular a la recta  $r$ .  
 c) Unes equacions de la recta que passa per  $P$  i talla perpendicularment  $r$ .  
 d) Unes equacions de la recta que passa per  $P$ , és paral·lela al pla  $\pi$  i tal que el seu vector director és perpendicular al de  $r$ .

[PAU00J3P2] Un quadrat de l'espai té tres dels seus vèrtexs consecutius situats en els punts de coordenades enteres  $P = (3, -2, 4)$ ,  $Q = (a, -1, a + 1)$  i  $R = (2, -3, 0)$ .

- a) Tenint en compte que els vectors  $\overrightarrow{PQ}$  i  $\overrightarrow{QR}$  han de ser perpendiculars, calculeu el valor del nombre enter  $a$ .  
 b) Calculeu l'equació del pla que conté aquest quadrat.  
 c) Calculeu el quart vèrtex d'aquest quadrat.  
 d) Calculeu l'àrea d'aquest quadrat.

[PAU00S2Q3] Donats els vectors  $\vec{u} = (1, -1, 4)$ ,  $\vec{v} = (2, 1, 3)$  i  $\vec{w} = (1, 0, 0)$

- a) Determineu si són vectors linealment dependents o independents.  
 b) Calculeu la relació que hi ha d'haver entre els valors de  $a$  i  $b$  per tal que el vector  $(a, 1, b)$  sigui combinació lineal de  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$

[PAU00S2P2] Considereu la recta

$$\left. \begin{aligned} 2x - 5y - z - 3 &= 0 \\ x - 3y - z - 2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

el pla  $2x - y + az + 2 = 0$ , on  $a$  és un paràmetre.

- a) Per a quin valor de  $a$  la recta i el pla són paral·lels? Quina serà llavors la distància entre el punt  $P = (1, 0, -1)$  de la recta i el pla?  
 b) Existeix algun valor de  $a$  per al qual la recta i el pla siguin perpendiculars?  
 c) Determineu el valor de  $a$  perquè la recta i el pla formin un angle de  $30^\circ$ .

[PAU00S6Q3] Calculeu el peu de la recta perpendicular a la recta  $(x, y, z) = (1, -1, 1) + \lambda(0, 1, 1)$  traçada des del punt  $(1, 0, -1)$ .

[PAU00S6P1] Considereu la recta  $r$  de l'espai que passa pel punt  $P = (1, 1, 3)$  i té per vector director  $\vec{v} = (1 - a, a, 1)$ . Sigui  $\pi$  el pla que té per equació  $2x + y - z = 1$ .

- a) Determineu per a cada valor del paràmetre  $a$  la posició relativa de la recta  $r$  respecte al pla  $\pi$  (paral·lela, continguda o amb un punt d'intersecció).  
 b) Hi ha alguna de les rectes  $r$  que sigui perpendicular al pla  $\pi$ ?  
 c) Calculeu la distància que hi ha entre el punt  $P$  i el pla  $\pi$ .

[PAU01S2Q3] Donats els punts de l'espai  $A = (2, 0, 0)$ ,  $B = (0, 1, 0)$  i  $C = (0, 0, 3)$ .

- a) Determineu l'equació del pla  $\pi$  que els conté.  
 b) Calculeu l'equació de la recta  $r$  perpendicular al pla  $\pi$  i que passa per l'origen.

[PAU01S5P1] Considereu a l'espai la recta  $r$  d'equacions  $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+1}{-1}$  i la recta  $s$

d'equacions  $\frac{x+4}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{1}$

- a) Determineu el punt de tall de la recta  $r$  amb el pla  $z = 0$ .  
 b) Comproveu que les rectes  $r$  i  $s$  són paral·leles i calculeu la distància entre elles.  
 c) Quina és l'equació del pla que conté les dues rectes?

d) Calculeu la distància del pla anterior a l'origen de coordenades.

[PAU01S4Q1] Determineu per a quins valors del paràmetre  $a$  el pla  $\pi: ax + 2y + z = a$

és paral·lel a la recta  $r: \begin{cases} x - ay + z = 1 \\ ax + z = a + 1 \end{cases}$

[PAU01S4P2] Sigui  $\pi$  el pla d'equació  $x - y + 2z = 3$  i  $P$  el punt  $(1, 1, 0)$ .

a) Calculeu la distància  $d$  de  $P$  a  $\pi$ .

b) Determineu l'equació de l'altre pla  $\pi'$  paral·lel a  $\pi$  que també dista  $d$  del punt  $P$ .

c) Determineu l'equació de la recta  $r$  perpendicular a  $\pi$  que passa per  $P$ .

d) Calculeu la intersecció de la recta  $r$  amb el pla  $\pi$ .

[PAU02J3Q3] Considereu els plans d'equacions:  $\pi_1: x + 2y - z = 3$  i  $\pi_2: ax + (a - 2)y + 2z = 4$ .

a) Hi ha algun valor del paràmetre  $a$  per al qual la intersecció dels plans  $\pi_1$  i  $\pi_2$  no és una recta?

b) Calculeu un vector director de la recta que s'obté quan es fa la intersecció de  $\pi_1$  i  $\pi_2$  per al valor del paràmetre  $a = 0$ .

[PAU02J3Q4] Considereu la recta  $r$  d'equacions:  $x - 1 = \frac{y - 5}{-3} = \frac{z - 7}{-4}$ . Calculeu els punts d'aquesta recta situats a una distància 3 del punt  $A = (1, 0, 1)$ .

[PAU02J2Q4] Calculeu l'angle que forma el pla  $x - 2y + z = 1$  amb la recta determinada

per les equacions  $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 \end{cases}$

[PAU02J2P1] Considereu les rectes  $r$  i  $s$  amb les equacions següents:

$$r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0 \end{cases} \quad s: \begin{cases} y + \frac{1}{3} = 0 \\ x - 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

a) Calculeu, de cada una de les rectes, un punt i un vector director.

b) Determineu si existeix cada un dels objectes següents i en cas afirmatiu calculeu la seva equació:

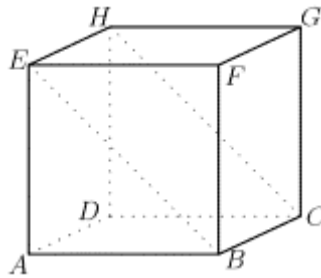
i) El pla paral·lel a la recta  $s$  que conté la recta  $r$ .

ii) El pla perpendicular a la recta  $s$  que conté la recta  $r$ .

iii) La recta perpendicular a les rectes  $r$  i  $s$  que passa per  $(0, 0, 0)$ .

[PAU02S1Q3] Comproveu que la recta que passa pels punts  $A = (4, 0, 0)$  i  $B = (0, 2, 2)$  és paral·lela al pla d'equació  $x - 3y + 5z = 2$ , i calculeu la distància entre la recta i el pla.

[PAU02S1P2] Considerem el cub de vèrtexs  $A, B, C, D, E, F, G, H$  que té l'aresta de longitud 4 dm.



- a) Determineu l'equació del pla inclinat  $EHBC$  si prenem com a origen de coordenades el vèrtex  $D$  i com a eixos de coordenades  $DA$ ,  $DC$  i  $DH$  en aquest ordre, tenint en compte que el sentit positiu de cada un d'ells és el que sortint de l'origen  $D$  va cap a  $A$ ,  $C$  i  $H$ , respectivament.
- b) Calculeu les equacions de les diagonals  $CE$  i  $AG$  i utilitzeu-les per calcular les coordenades del seu punt d'intersecció.

[PAU03J2Q3] Considereu el punt  $P = (5, -2, 9)$  i la recta  $r: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{6}$

- a) Calculeu l'equació de la recta  $s$  que talla perpendicularment  $r$  i que passa per  $P$ .
- b) Calculeu el punt de tall  $T$  entre les rectes  $r$  i  $s$ .

[PAU03J5Q2] Determineu l'equació del pla que conté a la recta  $x-1 = \frac{y}{2} = z+1$  i passa per l'origen de coordenades.

[PAU03S3Q4] Considereu els punts de l'espai  $A = (0, -2a-1, 4a-2)$ ,  $B = (1, -3, 4)$ ,  $C = (3, -5, 3)$ .

- a) Comproveu que el triangle de vèrtexs  $A$ ,  $B$  i  $C$  és rectangle en  $B$  per a qualsevol valor de  $a$ .
- b) Calculeu els valors de  $a$  que fan que aquest triangle sigui isòsceles.

[PAU03S3P2] Un segment d'extremes  $A = (5, 3, 1)$  i  $B = (4, 2, -1)$  es divideix en tres parts iguals mitjançant dos plans perpendiculars a aquest segment. Calculeu les equacions dels dos plans i la distància entre ells.

[PAU04J3Q4] Considerem els punts de l'espai  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(0, 1, 2)$  i  $C(-1, 2, 1)$ . Ens diuen que aquests tres punts formen part del conjunt de solucions d'un sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites. Es demana:

- a) aquests punts, estan alineats?
- b) podem saber el rang de la matriu del sistema d'equacions?
- Raoneu adequadament les respostes.

[PAU04J3P2] Tenim quatre punts a l'espai:  $A(0, 0, 0)$ ;  $B(0, 0, 2)$ ;  $C(0, 2, 0)$  i  $D(2, 0, 0)$ . Es demana:

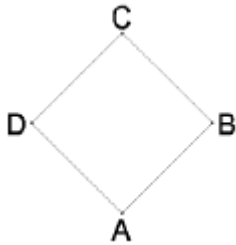
- a) representeu gràficament els quatre punts;
- b) calculeu el volum del tetràedre (piràmide de base triangular)  $ABCD$ ;
- c) trobeu l'equació del pla que passa per  $B$ ,  $C$  i  $D$ ;
- d) calculeu la distància de l'origen al pla de l'apartat anterior.

[PAU04J1Q2] Considereu els punts de l'espai  $A(0, 0, 1)$ ,  $B(1, 1, 2)$  i  $C(0, -1, -1)$ .

- a) Trobeu l'equació del pla  $ABC$ .

b) Si  $D$  és el punt de coordenades  $(k, 0, 0)$ , quant ha de valer  $k$  per tal que els quatre punts  $A, B, C$  i  $D$  siguin coplanaris?

[PAU04J1Q4] Els punts  $A(k-3, 2, 4)$ ,  $B(0, k+2, 2)$  i  $C(-2, 6, k+1)$  són tres dels vèrtexs d'un rombe  $ABCD$  (vegeu la figura).



- a) Calculeu el valor de  $k$ .  
b) Demostreu que el rombe és un quadrat.

[PAU04J4Q1] Considereu els punts de l'espai  $A(1, 1, 2)$ ,  $B(0, 1, 1)$  i  $C(k, 1, 5)$ .

- a) Trobeu l'equació de la recta que passa per  $A$  i  $B$ .  
b) Per a quins valors de  $k$  els punts  $A, B$  i  $C$  formen un triangle?

[PAU04J4P2] Considereu la recta  $r$  d'equació

$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 5 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

- a) Trobeu, en funció de  $t$ , la distància de  $M$  a un punt qualsevol de la recta  $r$ .  
b) Trobeu les coordenades dels punts  $A$  i  $B$  de  $r$  situats a distància  $3\sqrt{2}$  del punt  $M$ .  
c) El triangle  $\triangle AMB$ , és rectangle en  $M$ ?  
d) Els punts  $A$  i  $B$  formen part d'un paral·lelogram de vèrtexs  $ABCD$  que té el centre de simetria en el punt  $M$ . Calculeu les coordenades de  $C$  i  $D$ .

[PAU04S5P2] Considereu les rectes

$$r: \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2} \quad \text{i} \quad s: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 - 4t \\ z = 5 + t \end{cases}$$

- a) Estudieu la seva posició relativa.  
b) Trobeu l'equació del pla que conté  $s$  i és paral·lel a  $r$ .  
c) Calculeu la distància entre  $r$  i  $s$ .

[PAU05J4P2] Una piràmide de base quadrada té el vèrtex en el pla d'equació  $z = 3$ . Tres dels vèrtexs de la base són els punts del pla  $OXY$ :  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (1, 1, 0)$  i  $C = (0, 1, 0)$ .

a) Feu un gràfic dels elements del problema. Quines són les coordenades del quart vèrtex de la base,  $D$ ?

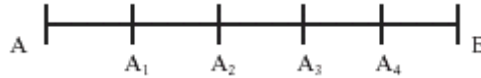
b) Quin és el volum de la piràmide?  $\left[ \text{Volum} = \frac{\text{àrea base} \times \text{altura}}{3} \right]$

c) Si el vèrtex de la piràmide és el punt  $V = (a, b, 3)$ , quina és l'equació de la recta que conté l'altura sobre la base?

[PAU05J1Q3] Trobeu la distància entre la recta  $r: \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{3}$  i el pla

$$\pi: 3x + 4y + 7 = 0$$

[PAU05J1Q4] Un segment d'origen en el punt  $A = (-1, 4, -2)$  i extrem en el punt  $B$  està dividit en cinc parts iguals mitjançant els punts de divisió  $A_1, A_2, A_3$  i  $A_4$  (vegeu la figura). Si sabem que  $A_2 = (1, 0, 2)$ , quines són les coordenades de  $B$ ?



[PAU05S3Q2] Considereu els vectors de  $\mathbf{R}^3$ :

$$\vec{v}_1 = (-1, 3, 4), \vec{v}_2 = (2, -1, -3) \text{ i } \vec{v}_3 = (1, 2k + 1, k + 3)$$

- Trobeu l'únic valor de  $k$  per al qual aquests vectors **no** són una base de  $\mathbf{R}^3$ :
- Per a un valor de  $k$  diferent del que heu trobat en l'apartat a), quins són els components del vector  $\vec{w} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$  en la base  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ ?

[PAU05S3Q3] Trobeu la distància entre la recta  $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{3}$  i el pla

$$\pi: 2x - 3y + 3z + 5 = 0$$

[PAU05S3Q4] Donats els punts  $A = (1, 0, 0)$  i  $B = (0, 0, 1)$ :

- Trobeu un punt  $C$  sobre la recta d'equació paramètrica  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$  que faci que el

triangle  $ABC$  sigui rectangle en  $C$ .

- Trobeu l'àrea del triangle  $ABC$ .

[PAU06J1Q1] Trobeu les coordenades dels punts situats sobre la recta d'equació  $(x, y, z) = (-1, 1, 1) + t \cdot (1, 2, 1)$  que estan a distància 1 del pla  $2x + 2y + z = 5$

[PAU06J1P1] Una recta  $r$  passa pel punt  $A = (3, 0, 2)$  i té la direcció del vector  $(-1, 1, 4)$

- Trobeu quin angle forma  $r$  amb el pla horitzontal.
- Comproveu que no passa pel punt  $A = (1, 3, 10)$
- Trobeu l'equació de la recta que passa per  $A$  i  $B$ .

[PAU06J3Q3] Determineu l'equació del pla perpendicular a la recta  $r: \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases}$

que passa pel punt  $(1, 1, 2)$ . Quina distància hi ha d'aquest pla a l'origen de coordenades?

[PAU06J3P2] Considereu la recta  $r: \begin{cases} 2x - 5y - z - 3 = 0 \\ x - 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$  i el pla

$$p: 2z - y + az + 2 = 0 \text{ on } a \text{ és un paràmetre.}$$

- Trobeu un vector director de la recta i un vector perpendicular al pla.
- Quin ha de ser el valor de  $a$  per tal que la recta i el pla siguin paral·lels?
- Esbrineu si existeixen valors de  $a$  per als quals la recta i el pla siguin perpendiculars. En cas afirmatiu, calculeu-los.
- Esbrineu si existeixen valors de  $a$  per als quals la recta i el pla formin un angle de  $30^\circ$ . En cas afirmatiu, calculeu-los.

[PAU06S4Q3] Calculeu l'equació de la recta paral·lela a la recta  $r: \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$  que passa pel punt  $(0,1,0)$

[PAU06S4Q4] Determineu els extrems d'un segment  $AB$  sabent que el punt  $A$  pertany al pla  $2x + y + z = 0$ . el punt  $B$  pertany a la recta  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$  i el punt mitjà del segment és  $(0,0,0)$

[PAU07J2Q1] Trobeu l'equació del pla perpendicular a la recta  $r: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$  que passa per l'origen de coordenades.

[PAU07J2Q4] Trobeu els punts de la recta  $r: x - 1 = y + 2 = z$  que equidisten dels plans  $\pi_1: 4x - 3z - 1 = 0$  i  $\pi_2: 3x + 4y - 1 = 0$

[PAU07J2P2] A l'espai es consideren els tres plans d'equacions:

$\pi_1: x + 2y + z = 1$ ,  $\pi_2: px + y + pz = 1$  i  $\pi_3: px + y + 2z = 1$ , on  $p$  és un paràmetre real.

- Esbrineu per a quins valors de  $p$  els tres plans es tallen en un únic punt. Trobeu aquest punt quan  $p = 1$ .
- Hi ha algun valor de  $p$  que faci que la intersecció comuna sigui una recta? Si és així, escriviu l'equació vectorial d'aquesta recta.
- Trobeu quina és la posició relativa dels tres plans quan  $p = 1/2$ .

[PAU07J1Q2] Considereu els punts de l'espai  $P = (-1, a - 1, 3)$ ,  $Q = (0, a - 2, 1 - a)$  i  $R = (2, -1, 6 - 6a)$

- Trobeu el valor de  $a$  per al qual els tres punts estan alineats.
- Quan els tres punts estan alineats, quina és l'equació de la recta que els conté?

[PAU07J1Q4] Trobeu l'equació de la recta continguda en el pla  $\pi: x + 2y + 6z - 2 = 0$ , que talla els eixos  $OY$  i  $OZ$ .

[PAU07J1P1] Considereu la recta d'equació  $r: x = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{2}$

- Expresseu el quadrat de la distància d'un punt qualsevol  $(x, y, z)$  de la recta al punt  $P = (1, 2, 5)$  com una funció de la coordenada  $x$ .
- Trobeu quin valor de  $x$  fa mínima aquesta funció, deduïu quin punt  $Q$  de la recta és el més proper a  $P$  i calculeu la distància del punt a la recta.
- Escriviu l'equació de la recta que passa per  $P$  i  $Q$  i comproveu que és perpendicular a  $r$ .

[PAU07S3Q1] Trobeu les equacions dels plans paral·lels a  $\pi: 2x - y + 2z = 3$  situats a 6 unitats de distància d'aquest.

[PAU07S3Q2] Donada la matriu següent dependent d'un paràmetre  $m$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m & 2m \\ m & 2 & 2+m \end{pmatrix}$$

- Estudieu-ne el rang segons els valors de  $m$ .
- Digueu quina és la posició relativa dels plans  $\pi_1 : x + y + 2z = 2$ ,  $\pi_2 : 2x + my + 2mz = 2 + m$  i  $\pi_3 : mx + 2y + (2 + m)z = 0$ , segons els valors de  $m$ .

[PAU07S3P1] Una recta  $r$  és paral·lela a la recta  $s : x - 1 = y - 1 = z - 1$ , talla en un punt  $A$  la recta  $t : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z + 1$ , i en un punt  $B$  la recta  $l : \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$ .

- Trobeu l'equació del pla determinat per les rectes  $r$  i  $t$ .
- Trobeu el punt  $B$  calculant el punt d'intersecció del pla anterior amb la recta  $l$ .
- Trobeu l'equació de la recta  $r$ .
- Trobeu el punt  $A$ .

[PAU08J2Q4] Trobeu l'equació de la recta perpendicular al pla  $\pi : 2x - y + z + 3 = 0$ , que passa pel punt  $(-1, 3, a)$  del pla.

[PAU08J2P2] Donades les rectes  $r : \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$  i  $s : \frac{x-1}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z+5}{3}$  i el

punt  $P = (1, 1, -1)$ , volem trobar l'equació de la recta que passa per  $P$  i que talla  $r$  i  $s$ . Per aconseguir-ho:

- Trobeu l'equació general o cartesiana (és a dir, l'equació de la forma  $Ax + By + Cz + D = 0$ ) del pla  $\pi$  que conté la recta  $r$  i el punt  $P$ .
- Trobeu el punt  $M$  calculant el punt d'intersecció del pla  $\pi$  amb la recta  $s$ .
- Trobeu l'equació de la recta que passa pels punts  $P$  i  $M$ .
- Comproveu que la recta trobada en l'apartat anterior és la que busquem.

[PAU08J5Q4] Donats el pla  $\pi : 3x - 2y + 5z = 6$  i la recta  $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-3}$ ,

busqueu el punt de tall, si existeix.

[PAU08S4Q4] Donats el punt  $P = (7, 5, 1)$ , el pla  $\pi : x - 2y - 3z = 10$  i la recta

$$r : \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 7 \\ x - 6y - 2z = 5 \end{cases}$$

- Trobeu la distància del punt  $P$  al pla  $\pi$ .
- Trobeu la distància del punt  $P$  a la recta  $r$ .
- Trobeu la distància de la recta  $r$  al pla  $\pi$ .

[PAU08S4P2] Les rectes  $r_1 : \frac{x-a}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{4}$  i  $r_2 : \frac{x+2}{1} = \frac{y-b}{2} = \frac{z-4}{-1}$  són

coplanàries (és a dir, estan incloses en un mateix pla).

- Expliqueu, raonadament, quina és la posició relativa d'aquestes rectes.
- Trobeu la relació que hi ha entre els paràmetres  $a$  i  $b$ .
- Trobeu els valors de  $a$  i  $b$  si el pla que les conté passa pel punt  $P = (2, 4, 6)$ .



**SOLUCIONS****PAU97J2**

A1  
A2  
A3  
A4  
B1  
B2  
B3  
B4

**PAU97J3**

A1  
A2  
A3  
A4  
B1  
B2  
B3  
B4

**PAU97S1**

A1  
A2  
A3  
A4  
B1  
B2  
B3  
B4

**PAU97S4**

A1  
A2  
A3  $k=1,2 \cdot 10^{-4}$ , 2,7%  
A4  
B1  
B2  
B3  
B4

**PAU98J3**

Q1  
Q2  $\frac{13}{6}$   
Q3  
Q4  
P1  
P2

**PAU98J6**

Q1  
Q2  
Q3  
Q4  
P1  
P2

**PAU98S5**

Q1  
Q2  
Q3  
Q4  
P1  
P2

**PAU98S2**

Q1  
Q2  
Q3  
Q4  
P1  
P2

**PAU99J1**

Q1 Compatible quan  $k=7$  (solució:  $x=1$   $y=1$ ), Incompatible quan  $k \neq 7$   
Q2  $\frac{128}{15}$

- Q3  $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2} + 1$   
 Q4  $5\sqrt{3} \approx 8,660$  m  
 P1 a) discontinua en  $x=-4$  (essencial)  
 b) màxim local  $x=-8$ , mínim local  $x=0$ , decreixent en  $(-8, 0)$ , creixent en  $(-\infty, -8) \cup (0, +\infty)$   
 c) 0,487  
 P2 a)  $x+y+z-3=0$  i  $z=0$   
 b)  $x=y=z$  i  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$   
 c)  $P=B=(1, 1, 1)$   
 d) En general no

**PAU99J6**

- Q1  
 Q2  
 Q3  
 Q4  
 P1  
 P2

**PAU99S2**

- Q1  
 Q2  
 Q3  
 Q4  
 P1  
 P2

**PAU99S5**

- Q1  
 Q2  
 Q3  
 Q4  
 P1  
 P2

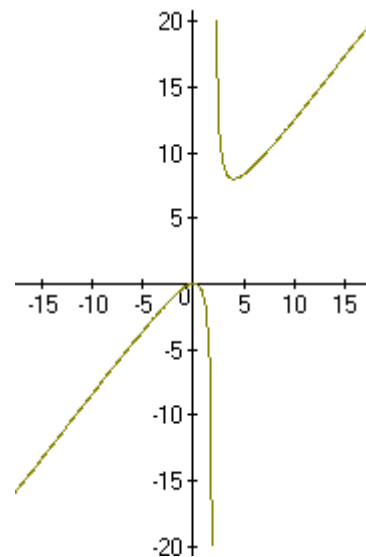
**PAU00J1**

- Q1  $\sqrt{\frac{5}{3}}$  i  $-\sqrt{\frac{5}{3}}$   
 Q2  $\frac{14}{3} - 6 \ln 2$

- Q3 a) una equació amb coeficients que no siguin combinació lineal dels de les donades.  
 b) una equació combinació lineal de les dues donades.  
 Q4  $\cong 153,0708$  m.  
 P1 a)  $45 - \frac{3}{4}x$   
 b)  $V(x) = -15000x^2 + 900000x + 6750000$   
 c)  $x=30$  m  $y=22,5$  m  
 d) 20250000 pts  
 P2 a)  $x - 2 = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{3}$   
 b)  $2x + y + z - 6 = 0$   
 c)  $\frac{x - 2}{-7} = \frac{y - 1}{13} = z - 1$   
 d)  $\frac{x - 2}{-1} = \frac{y - 1}{5} = \frac{z - 1}{-3}$

**PAU00J3**

- Q1  $a = -\frac{14}{3}$ ,  $b = \frac{16}{3}$   
 Q2  $x=-1$ ,  $y+4=-(x+1)$   
 Q3  $a=6$ , tres plans que es tallen dos a dos  
 Q4  $\cong 0,6128$   
 P1 a)  $a=-2$   
 b)  $dom f = \mathbb{R} - \{2\}$   
 intersecció eix  $x$ :  $(0, 0)$   
 intersecció eix  $y$ :  $(0, 0)$   
 creixent:  $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$   
 decreixent:  $(0, 2) \cup (2, 4)$   
 màx:  $(0, 0)$ , mín:  $(4, 8)$

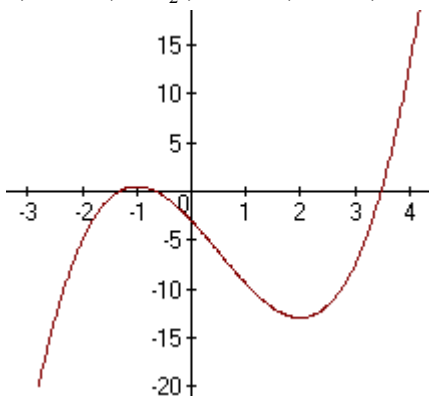


- P2 a)  $a=1$

- b)  $2x+2y-z+2=0$
- c)  $(4, -4, 2)$
- d) 9

**PAU00S2**

- Q1 a) màx  $(-1, \frac{1}{2})$ , mín  $(2, -13)$

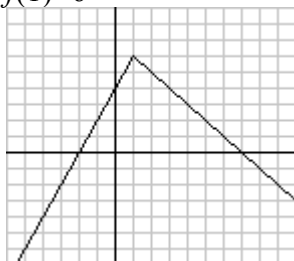


b) Cal aplicar el T.Bolzano als intervals d'extremes  $x=-1000, x=-1, x=2, x=1000$

- Q2  $\frac{103}{6}$
- Q3 a) linealment independents
- b)  $-7a+3b+5=0$
- Q4 a)  $\tan\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$
- b)  $\sin 2\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{9}$
- P1 a)  $f(x) = 5 - x + 2\sqrt{x^2 + 36}$   
essent  $x$  la distància del punt arbitrari al costat desigual. Per tant  $dom f = [0, 5]$
- b) mín.  $x = 2\sqrt{3}$   
màx.  $x = 0$
- P2 a)  $a=3, d(P, \pi) = \frac{\sqrt{14}}{14}$
- b) Cap  $a$
- c)  $a = -6 + \sqrt{39}, a = -6 - \sqrt{39}$

**PAU00S6**

- Q1  $f(1)=6$



- Q2  $y - \frac{2}{e} = -\frac{1}{e}(x-1)$
- Q3  $P = (1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

- Q4 a)  $(3, -2) r = \sqrt{5}$  b)  $x+2y=4$

P1 a) Si  $a=1$  la recta és paral·lela al pla, i si  $a \neq 1$  la recta talla el pla en un punt.

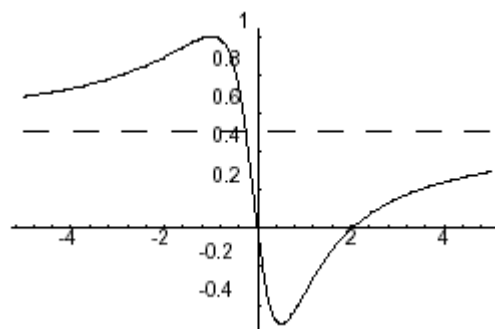
b) no hi ha cap

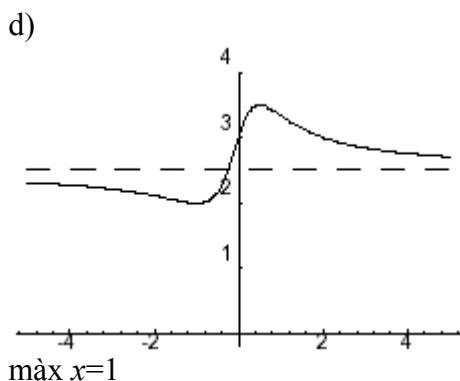
c)  $\frac{\sqrt{6}}{6}$

- P2 a) 101, 988
- b) 253, 748 L'Àlex, perquè l'angle  $ABV$  és més gran que el  $BAV$ .

**PAU01J2**

- Q1 a)  $\frac{\pi}{4}$
- b)  $\cong 0,4518$
- Q2 a)  $y-4=-(x-4)$
- b)  $C=(6,2) r=\sqrt{8}$
- Q3 a)  $3x+6y+2z-6=0$
- b)  $\frac{x}{3} = \frac{y}{6} = \frac{z}{2}$
- Q4  $90^\circ, 36.87^\circ, 53.13^\circ, 6\text{cm}^2$
- P1 a)  $77^\circ$
- b)  $AC \cong 1,7659\text{cm}, BC \cong 2,8547\text{cm}$
- c)  $AB=1,5\text{km}, BC \cong 1,427\text{km}, AC \cong 883\text{m}$
- P2 a)  $y = \frac{1}{2}$  horitzontal
- b) creixent:  $(-\infty, 1) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$   
decreixent  $(1, \frac{1}{2})$   
màx  $x=1$ , mín  $x=\frac{1}{2}$
- c)





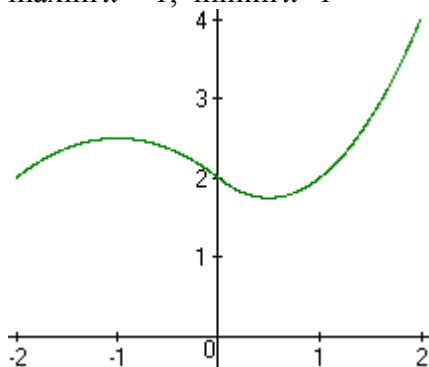
- P1 a)  $\sqrt{\frac{1}{16}x^4 - x^2 + 16}$   
 b)  $x=0$   
 c) no
- P2 a)  $\sqrt{\frac{3}{2}}$   
 b)  $x-y+2z+3=0$   
 c)  $x-1 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$   
 d)  $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1)$

**PAU01J5**

- Q1 a) Si  $a=3$  funció constant  
 Si  $a>3$  no té extrems locals  
 Si  $a<3$ ,  $x=\sqrt{3-a}$  mín.local  
 $x=-\sqrt{3-a}$  màx.local

b)  $a>3$

- Q2 màxim  $x=-1$ , mínim  $x=1$



- Q3  $(x-5)^2+(y+7)^2=52$

Q4 1

- P1 a) (0, 0, 0)

b)  $d(r, s) = \frac{\sqrt{107}}{2}$

c)  $13x+12y-10z=0$

d) 0

- P2  $CD=5$ ,  $AD=5$ ,  $BD=10$ ,  $AB=15$ ,  
 $BC=5\sqrt{5}$ ,  $AC=5\sqrt{2}$

**PAU01S4**

- Q1  $a=1$

Q2  $\sqrt{7}$

- Q3 a) 1

b)  $a=2$

- Q4 a)  $f(x)=x^2-2x-3$

b)  $\frac{32}{3}$

**PAU02J3**

- Q1  $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3} - \sqrt{3}$

Q2  $k=\frac{13}{6}$  lím= $\frac{3}{2}$

- Q3 a)  $a=-2$

b) (-1, 1, 1)

- Q4 (2, 2, 3) i (3, -1, -1)

- P1 a)  $h = \frac{81}{r^2}$   $C(r) = \frac{4860\pi}{r} + 90\pi r^2$

b)  $r = 3$  m  $h = 9$  m

c)  $\cong 7634,07$  €

- P2 a)  $150^\circ$

b) 12 cm

c)  $\cong 30,9789$  cm

**PAU02J2**

- Q1  $\cong 4,0472$

Q2  $x=4$

- Q3 a) Si  $m=2$  lím= $\infty$ , si  $m \neq 2$  lím= $2$

b)  $m<2$

Q4  $16,77^\circ$

- P1 a)  $\vec{v}_r = (1,1,2)$   $\vec{v}_s = (-2,0,-1)$

punts...qualssevol  $(x,y,z)$  que compleixi cada parella d'equacions

b) i)  $x+3y-2z-5=0$

b) ii) no existeix

b) iii)  $x = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$

- P2 a)  $54^\circ$

b)  $\cong 1,1755$ m

c)  $\cong 1,90211$ m

d)  $\cong 0,65716$ m<sup>2</sup>

**PAU02S1**

- Q1  $a=4$

Q2  $x=-3$ (mínim)  $x=2$ (mínim)

- Q3  $\frac{2}{\sqrt{35}}$   
 Q4 a)  $\cong 19,078$   
 b)  $\cong 51,96152$   
 P1 a)  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) i \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$   
 b)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 c) cap  
 d)  $x=0$   
 P2 a)  $y+z=4$   
 b)  $(2, 2, 2)$

**PAU03J2**

- Q1  $y+1=-2(x-1) \quad y+1=2(x-1)$   
 Q2  $\frac{1}{2}$   
 Q3  $s: \frac{x+1}{-6} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-6}{-3} \quad T = (-1, -4, 6)$   
 Q4  $\lambda = -\frac{7}{2}$   
 P1  $OP = \sqrt{3}$ , sent  $O$  la projecció de  $M$   
 Cost  $\cong 85,1769\text{€}$   
 P2 a) 7, 4 i 4.0623 metres  
 b)  $30^\circ, 120.5063^\circ$  i  $29.4937^\circ$

**PAU03J5**

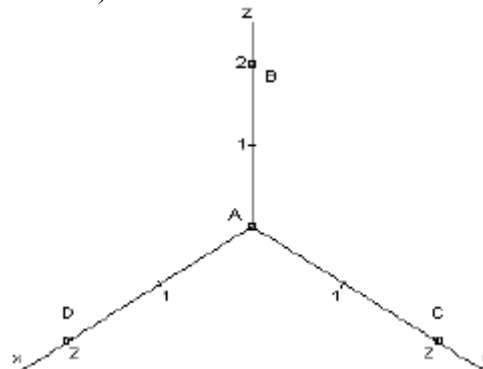
- Q1  
 Q2  
 Q3  
 Q4  
 P1  
 P2

**PAU03S3**

- Q1  $g(x) = e^{(x^2+x)} + 1$   
 Q2  $(0, 2)$   
 Q3  $\cong 106,8813 \text{ cm}^2$   
 Q4 a)  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$   
 b)  $a=2, a=\frac{4}{5}$   
 P1 a) semblança de triangles  
 b)  $9600+60x-0,3x^2$   
 c)  $C_1: 300 \times 250 \text{ m} \quad C_2: 240 \times 150 \text{ m}$   
 P2  $x+y+2z-6=0 \quad x+y+2z-8=0$   
 dist  $= \frac{\sqrt{6}}{3}$

**PAU04J3**

- Q1 a)  $y=11x-25$   
 b)  $y=11x+7$   
 Q2 a)  $\frac{\sin^3 x}{3} + C$   
 b)  $\frac{\sin^3 x - 1}{3}$   
 Q3 a)  $a=-4$   
 b) mínim  
 Q4 a) No  
 b) 1 (o 0)  
 P1 a) Si  $m \neq 1$  SCD. Si  $m=1$  SCI  
 b) Si  $m \neq 1 \quad x=\frac{3}{2}, y=0, z=2$   
 Si  $m=1 \quad x=\frac{3}{2}, y=2-\lambda, z=\lambda$   
 c) Si  $m \neq 1$  tres plans que estallen en un punt. Si  $m=1$  dos plans que es tallen en una recta.  
 P2 a)



- b)  $\frac{4}{3}$   
 c)  $x+y+z-2=0$   
 d)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

**PAU04J1**

- Q1 a) SCI  
 b)  $x=5\lambda-2, y=1-2\lambda, z=\lambda$   
 Q2 a)  $-x+2y-z+1=0$   
 b)  $k=1$   
 Q3  $X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$   
 Q4 a)  $k=2$   
 b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$   
 P1 a)  $m=\frac{3}{2}$   
 b)  $(-1, 1) i \left(\frac{1}{3}, \frac{31}{27}\right)$   
 P2 a)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$   
 b)  $\left(\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

**PAU04J4**

Q1 a) 
$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$$

b)  $k \neq 4$

Q2  $\frac{2}{3}$

Q3 83,333 km/h

Q4 a)  $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$

b)  $x=1$

c)  $\frac{7}{4}$

P1 a)  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4\lambda - 3 \\ -4 + 5\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$

b)  $c - 2a - b \neq 0$

P2 a)  $3\sqrt{t^2 - 4t} + 5$

b)  $(-1, 3, 4), (3, -1, 6)$

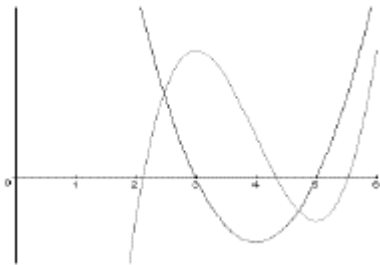
c) Sí,  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$

d)  $(5, 3, 10), (1, 7, 8)$

**PAU04S5**

Q1 5

Q2



Q3 a)  $X = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$

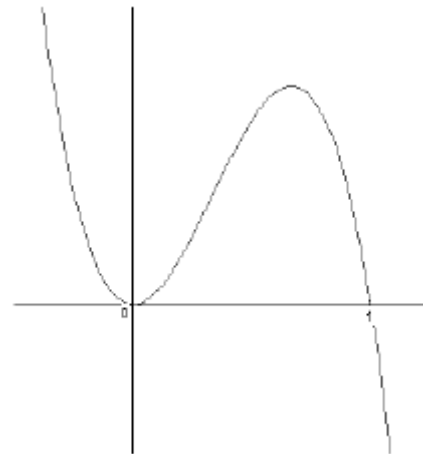
b)  $\begin{pmatrix} 2^{99} & 2^{99} \\ 2^{99} & 2^{99} \end{pmatrix}$

Q4 a) en són dos i no proporcionals.

b)  $(2, 1)$  és a dir  $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$

P1 a)  $a < 0, b = -a, c = 0, d = 0$

b)



P2 a) es creuen

b)  $7x + 4y - 5z + 22 = 0$

c)  $\frac{16\sqrt{10}}{15}$

**PAU05J4**

Q1 commuten per a tot  $a$  i  $b$

Q2 a)  $\frac{1}{5}\sqrt{5x^2 - 4} + C$

b)  $\frac{1}{5}\sqrt{5x^2 - 4} + \frac{4}{5}$

Q3 no en té

Q4 a)  $y - 1 = x$

b)  $(-\frac{1}{2}, 1)$

P1 a)  $k=3$

b)  $x=1, y=-1, z=0$

P2 a)  $D=(0,0,0)$

b) 1

c)  $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$

**PAU05J1**

Q1 a) SCD per a tot  $a$

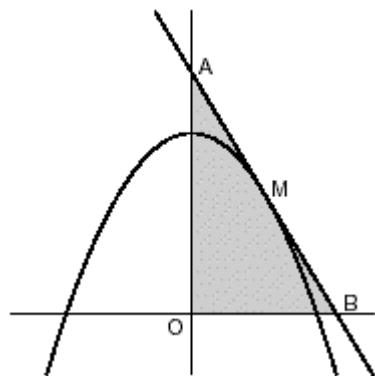
b)  $x = \frac{1+3a}{1+a^2}, y = \frac{3-a}{1+a^2}$

Q2 f1 i f2 (4435€)

Q3 4

Q4  $(4, -6, 8)$

P1

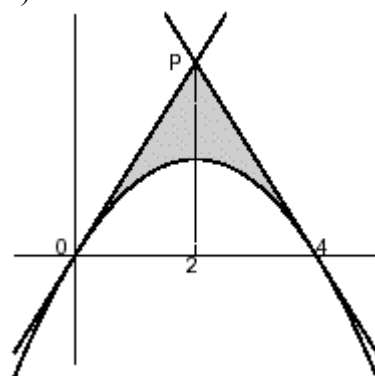


b)  $M=(1, 2)$

P2

a)  $y=4x, y=-4x+16$

b)



c)  $\frac{16}{3}$

**PAU05S3**

Q1 Sistema incompatible

Q2 a)  $k=3$

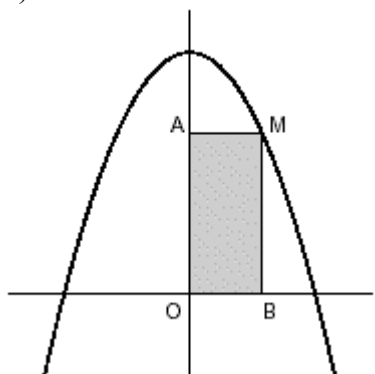
b)  $(1, 1, 1)$

Q3 0

Q4 a)  $C = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

b)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

P1 a)



b)  $M=(1, 2)$

P2

a)  $a=b$

b)  $a = b \neq \pm 1$

c)  $e - \frac{1}{6} \cong 2,5516$

**PAU06J1**

Q1  $(0,3,2)$  i  $(-\frac{6}{7}, \frac{9}{7}, \frac{8}{7})$

Q2 SCI sii  $m=1$

S.Inc: mai

Q3 efectivament

Q4  $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$

AV  $x = 1$

AO  $y = x-3$

P1 a)  $70,529^\circ$

b)  $\overrightarrow{AB}$  no és proporcional al vector director

c)  $\frac{x-3}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{8}$

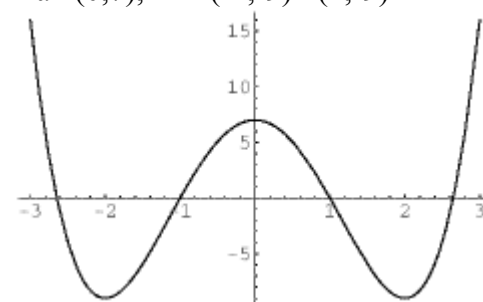
P2 a)  $c = 0$

b)  $a = 0, b = -8$

c) Creix en  $(-2,0) \cup (2,+\infty)$

decreix en  $(-\infty,-2) \cup (0,2)$

màx  $(0,7)$ , mín  $(-2,-9)$  i  $(2,-9)$



**PAU06J3**

Q1 pendent = -1

$x = -2 \quad x = 0$

Q2 a)  $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0,2) \\ 0 & \text{si } x \in (2,4) \\ -2 & \text{si } x \in (4,5) \end{cases}$

b) 4

Q3 0

Q4  $m=1, m=3$

$\text{rang}(A) \neq 1$  per a tot  $m$

P1 a)  $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

intersecció eix  $x$ : no hi ha

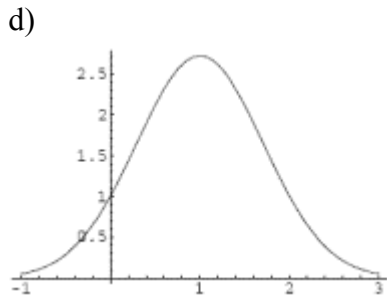
intersecció eix  $y$ :  $y=1$

b) creix:  $(-\infty,1)$

decreix:  $(1,+\infty)$

màxim:  $(1,e)$

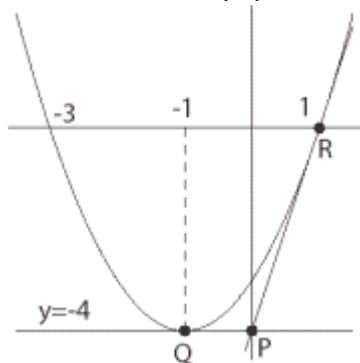
c) AH  $y = 0$



- P2 a)  $\vec{d} = (2,1,-1)$   $\vec{n} = (2,-1,a)$   
 b)  $a = 3$   
 c) No n' existeix cap  
 d)  $a = -6 + \sqrt{39} \cong 0,244998$   
 $a = -6 - \sqrt{39} \cong -12,244998$

**PAU06S4**

- Q1 a)  $a = -1, b = 4$   
 b) màxim  
 Q2 a)  $\frac{1}{2} \ln(2x+1)$   
 b)  $\ln \sqrt{\frac{9}{5}} \cong 0,29389$   
 Q3  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$   
 Q4  $A = (\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}, 2), B = (-\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, -2)$   
 P1 a)  $y = -4, y = 4x-4$   
 b)  $(-1,-4)$   
 c) intersecció eix x:  $x=-3, x=1$   
 intersecció eix y:  $y=-3$



- d)  $\frac{2}{3}$   
 P2 a) Si  $p=7 \Rightarrow$  S.Incompatible  
 Si  $p=9 \Rightarrow$  S.Incompatible  
 Si  $p \neq 7, p \neq 9 \Rightarrow$  S.Comp.Det.  
 b) Si  $p=7 \Rightarrow$  1r i 3r pla paral·les,  
 el segon els talla

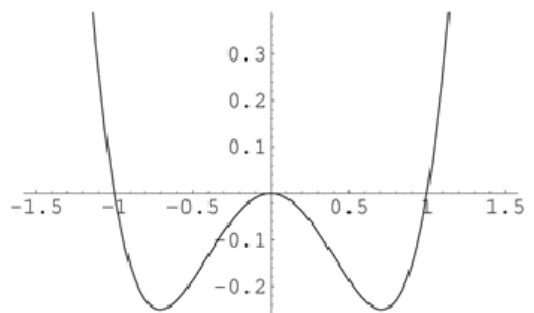
Si  $p=9 \Rightarrow$  Els tres plans es tallen dos a dos, sense cap punt comú als tres (forma de A)  
 c)  $x=85, y=60, z=55$

**PAU07J2**

- Q1  $x-2y+z=0$   
 Q2 a) A tots excepte  $x = 1$   
 b) Creix  $(-\infty, 2)$   
 Decreix  $(2, +\infty)$   
 c)  $x=2$  màx relatiu  
 d)  $f(1)=2$   
 Q3  $a = 1, a = -1$   
 Q4  $(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$  i  $(\frac{11}{8}, -\frac{13}{8}, \frac{3}{8})$   
 P1 8x12 metres  
 P2 a)  $p \neq 2$  i  $p \neq \frac{1}{2}$   
 $(1,0,0)$   
 b)  $p = 2$   
 $(x,y,z) = (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) + \lambda(3,0,-3)$   
 c)  $\pi_1, \pi_2$  paral·les,  $\pi_3$  els talla

**PAU07J1**

- Q1  $x = -1$   
 $y = -\frac{1}{e}$   
 Q2 a)  $a = 3$   
 b)  $x = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{-5}$   
 Q3



àrea =  $\frac{4}{15}$

- Q4  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + \lambda \\ z = -\frac{1}{3} \lambda \end{cases}$   
 P1 a)  $f(x)=9x^2-18x+17$   
 b)  $x = 1$   
 $Q = (1,4,3)$   
 dist =  $\sqrt{8}$

$$c) \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 5 - 2\lambda \end{cases}$$

- P2 Si  $p=4$  SCI,  $\pi_1$  i  $\pi_2$  coincidents i  $\pi_3$  els talla  
 Si  $p=3$  SI,  $\pi_1$  i  $\pi_3$  paral·lels i  $\pi_2$  els talla  
 Si  $p \neq 3$  i  $p \neq 4$  SCD,  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  i  $\pi_3$  es tallen al punt  $(\frac{3}{3-p}, 0, \frac{12-5p}{3-p})$

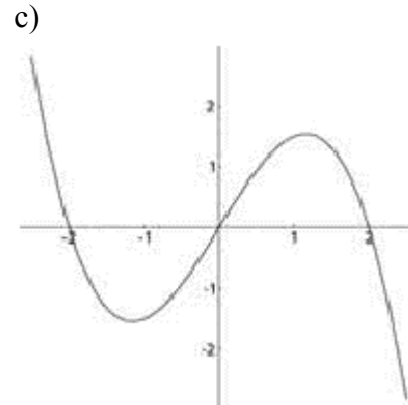
**PAU07S3**

- Q1  $2x-y+2z+15=0$   
 $2x-y+2z-21=0$
- Q2 a) Si  $m \neq 2$ , rang=3  
 Si  $m=2$ , rang=1  
 b) Si  $m \neq 2$ , es tallen en un punt  
 Si  $m=2$ ,  $\pi_1$  i  $\pi_2$  coincidents i  $\pi_3$  els talla
- Q3  $p=0, q=1$   
 $A^{10}=A$
- Q4  $F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$
- P1 a)  $x-2y+z=0$   
 b)  $B=(2,1,0)$   
 c)  $x-2 = y-1 = z$   
 d)  $A=(1,0,-1)$
- P2 a)  $a=3, b=-\frac{17}{2}$   
 b)  $y+4=3(x-3)$   
 c)  $\frac{125}{6}$

**PAU08J2**

- Q1 a)  $F(x) = \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{3}$   
 b)  $\frac{17}{7}$
- Q2 a)  $M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$   
 b) Si  $n$  és senar  $M^n=M$   
 Si  $n$  és parell  $M^n=I$
- Q3 Si  $m=-1$  SCI  
 Si  $m=2$  SI  
 Si  $m \neq -1$  i  $m \neq 2$  SCD
- Q4  $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{1}$
- P1 a) màx rel  $x=-2, x=2$

- mín rel  $x=0$   
 b) creixent  $(-3,-2) \cup (0,2)$   
 decreixent  $(-2,0) \cup (2,3)$



- c)
- d)  $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + x^2 - 1$
- P2 a)  $\pi: y+2z+1=0$   
 b)  $M=(3,-3,1)$   
 c)  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+1}{2}$

**PAU08J5**

- Q1  $a=\frac{7}{2}, b=4$
- Q2 a)  $a=1, b=0$   
 b)  $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$   
 c)  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Q3  $x=1, y=x-1+\ln 2$
- Q4  $(-1,-2,1)$
- P1 a) Si  $a=2$  SCD  
 Si  $a=4$  SI  
 Si  $a \neq 2$  i  $a \neq 4$  SCD  
 b)  $x = \frac{4+\lambda}{5}, y = \frac{12+3\lambda}{5}, z=\lambda$   
 c) agafant  $\lambda=1+5n$ , per qualsevol  $n$  enter
- P2 Els dos catets fan  $5\sqrt{2}$

**PAU08S4**

Q1  $a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$

Q2 a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

b)  $A^{60124} = -A$

Q3 a) Sí, per exemple  $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ 

b) No, el rang no pot arribar a ser igual al nombre d'incògnites (3)

Q4 a)  $\frac{16}{\sqrt{14}}$

b) 6

c) 0

P1 a) ...

b) ...

c) ...

d) dividint numerador i denominador per  $e^x$ 

P2 a) es tallen

b)  $3a + 2b + 11 = 0$

c)  $a = -3, b = -1$

